

**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ & ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ**

Διδάσκων: Γ. Παπαγεωργίου

Ιούνιος 2007

**Θέμα 1: (0.75 , 1.5 , 0.75) = 3 μονάδες**

α) Δίνεται η διαφορική εξίσωση 3ης τάξης της μορφής:

$$y''' = -2y'' - y' - 2y.$$

Να μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο σύστημα διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης. Εν συνεχεία το σύστημα που θα προκύψει, να μελετηθεί ως προς την ευστάθεια.

β) Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής:  $y' = f(x, y) = -4y^2/3$ ,  $y(0) = 1$ , και ζητάμε την προσέγγιση  $y_1$  στο σημείο  $x_1 = 0.2$ , εφαρμόζοντας την έμμεση μέθοδο τραπεζίου με  $h = 0.2$ .

( $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \{f_n + f_{n+1}\}$ ). Να υπολογίσετε την μη γραμμική αλγεβρική εξίσωση για την προσέγγιση της  $y_1$ , και εν συνεχεία να εφαρμόσετε τον επανάληπτικό τύπο της μεθόδου *Newton*, ( $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ ), για την επίλυση αυτής. Υπολογίστε μία αρχική προσέγγιση  $y_1^{(0)}$ , εφαρμόζοντας την άμεση μέθοδο του υποερωτήματος (γ), και εν συνεχεία υπολογίστε μία βελτιωμένη αριθμητική τιμή για την  $y_1$ , εφαρμόζοντας δύο φορές την μέθοδο *Newton*.

γ) Δίνεται η μέθοδος (RK) της μορφής:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2\right) \end{aligned}$$

Να υπολογίσετε το πολυώνυμο ευστάθειας της μεθόδου, εφαρμόζοντας την διαφορική εξίσωση μοντέλο,  $y' = \lambda y$ ,  $y(0) = y_0 (\neq 0)$ , όπου  $\lambda$  είναι ένας πραγματικός και αρνητικός αριθμός.

**Θέμα 2: (0.5 , 1.5) = 2.0 μονάδες**

α) Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής:  $y' = f(x, y)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $y(a) = y_0$  (1)

και την μέθοδο  $k$ -βημάτων της μορφής:  $\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}$  (2)

- Να ορίσετε το 1<sup>ο</sup> και 2<sup>ο</sup> χαρακτηριστικό πολυνόμου που αντιστοιχεί στην (2).
- Αναφέρατε τα κριτήρια που πρέπει να ισχύουν ώστε η (2) να είναι μηδενικά-ευσταθής και συνεπής αντίστοιχα.

β) Δίνεται η πολυβηματική μέθοδος 3ης τάξης της μορφής:

$$y_{n+2} - (a+1)y_{n+1} + ay_n = \frac{h}{12} \{(5+a)f_{n+2} + 8(1-a)f_{n+1} - (1+5a)f_n\}.$$

Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές της παραμέτρου  $a$  για τις οποίες η μέθοδος συγκλίνει και να υπολογιστούν.

### **Θέμα 3: (1.5 , 1.0) = 2.5 μονάδες**

α) Να περιγράψετε τα βασικά βήματα της μεθόδου **Galerkin** για την επίλυση του προβλήματος δύο συνοριακών τιμών,  $u'' - 3u = 2x^2$ ,  $x \in (0,1)$ ,  $u(0) = u(1) = 0$ , θεωρώντας σαν συναρτήσεις βάσης, γενικά, τις γραμμικά ανεξάρτητες τμηματικές συναρτήσεις  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ .

β) Δίνεται το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών της μορφής:

$$-u'' + \lambda u = f, \quad x \in (0,1), \quad u'(0) = u'_0, \quad u'(1) = u'_1$$

Να δειχθεί ότι η ασθενής μορφή του προβλήματος, για την εφαρμογή της μεθόδου **Galerkin**, δίνεται από την σχέση:  $\int_0^1 (u' \varphi' + \lambda u \varphi) dx = \int_0^1 f \varphi dx + u'_1 \varphi(1) - u'_0 \varphi(0), \forall \varphi \in C^1[0,1]$ .

### **Θέμα 4: (1.25 μονάδες)**

Θεωρούμε το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών της μορφής:

$$u'' = xu' + 2x, \quad 0 < x < 2, \quad u(0) = 0, \quad u(2) = 2,$$

και τα σημεία της διαμέρισης  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0.8$ ,  $x_3 = 1.5$ ,  $x_4 = 2$ . Να εφαρμόσετε την μέθοδο της **ταξινόμησης** για την προσέγγιση της λύσης χρησιμοποιώντας σαν συναρτήσεις βάσης τα πιολυωνύμα  $\phi_1(x) = 1$ ,  $\phi_2(x) = x$ ,  $\phi_3(x) = x(x-2)$ ,  $\phi_4(x) = x(x^2-2)$ .

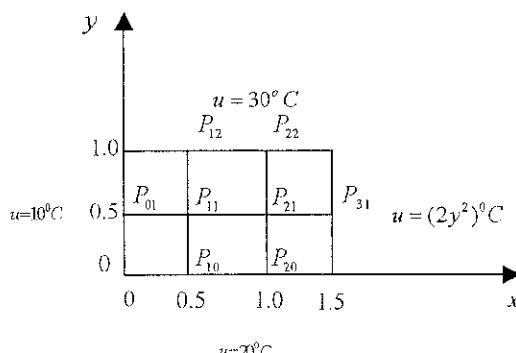
### **Θέμα 5: (1.25 μονάδες)**

Μία ορθογώνια μεταλλική πλάκα μεγέθους  $1.5m \times 1.0m$ , διαμερίζεται με ένα τετραγωνικό πλέγμα όπου  $h = k = 0.5$ . Η θερμοκρασία κατά μήκος των ακρών είναι  $10^\circ C$ ,  $20^\circ C$ ,  $(2y^2)^\circ C$ , και  $30^\circ C$ , όπως δείχνει το σχήμα. Η κατανομή της θερμοκρασίας στην πλάκα περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση Poisson στις δύο διαστάσεις και είναι της μορφής

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 3xy$$

Να ιπολογιστεί η θερμοκρασία στα εσωτερικά σημεία της διαμέρισης.

$$(Χρήσιμοι τύποι: \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}).$$



**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

① ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3.00 ΩΡΕΣ ②