

Άλγεβρα 1 – ΣΕΜΦΕ – 2006/07 (διδ: Ε. Αγγελόπουλος)

Το παρόν πρόβλημα ασχολείται με τη μελέτη δομών που γενικεύουν ή εξειδικεύουν τον δακτύλιο  $\mathcal{L}(X)$  των γραμμικών μετασχηματισμών ενός διανυσματικού χώρου  $X$ . Οι ερωτήσεις 1 ως 7 βαθμολογούνται με 1,5 η καθεμία, η ερώτηση 8 είναι για όποιον θέλει να εμβαθύνει μετά την εξέταση (και δεν βαθμολογείται). Βαθμολογικό μόνονος δίνεται στη σαφήνεια της έκφρασης. Είναι θεμιτή η χρήση αποτελεσμάτων προγενεστέρων ερωτήσεων, ακόμη κι αν δεν έχουν αποδειχτεί στο γραπτό. Επιτρέπεται η χρήση βιβλίων και σημειώσεων.

.....

Σε ότι ακολουθεί,  $(X,+)$  [ή, απλούστερα,  $X$ ] δηλώνει μια Αβελιανή ομάδα με προσθετικό συμβολισμό της πράξης, ουδέτερο στοιχείο το  $0$  και αντίθετο του  $x$  το  $(-x)$  για κάθε  $x$  στοιχείο του  $X$ . Το σύνολο των συναρτήσεων από το  $X$  στον εαυτό του θα καλείται  $\text{Syn}(X)$  και το υποσύνολο των αντιστρέψιμων συναρτήσεων  $\text{Syn}(X)^*$ . Υπενθυμίζεται ότι το σύνολο  $\text{Syn}(X)$  αποτελεί αβελιανή ομάδα ως προς την πρόσθεση συναρτήσεων:

$$[f \oplus g](x) = f(x) + g(x),$$

με ουδέτερο στοιχείο τη σταθερή συνάρτηση  $0$  και αντίθετο στοιχείο της συνάρτησης  $g$  την  $-g$ , ενώ το σύνολο  $\text{Syn}(X)^*$  αποτελεί ομάδα ως προς την σύνθεση συναρτήσεων:

$$[f \circ g](x) = f(g(x)),$$

με ουδέτερο στοιχείο την ταυτοτική συνάρτηση  $\text{Id}(x)=x$  και αντίστροφη της  $g$  την  $g^{-1}$ . Το σύνολο  $\text{End}(X)$  των ενδομορφισμών του  $X$  αποτελείται από τις συναρτήσεις που διατηρούν την πρόσθεση, δηλαδή:

$$a \in \text{End}(X) \Leftrightarrow a(x+y) = a(x) + a(y),$$

ενώ το σύνολο  $\text{Aut}(X)$  των αυτομορφισμών του  $X$  είναι η τομή των  $\text{End}(X)$  και  $\text{Syn}(X)^*$ , αποτελείται δηλαδή από τους αντιστρέψιμους ενδομορφισμούς και είναι υποομάδα της ομάδας  $\text{Syn}(X)^*$ .

1) Δείξτε ότι  $(\Delta.o)$   $\text{Id} \in \text{End}(X)$  και, για  $a, b, c \in \text{End}(X)$ , ισχύουν  $a \circ b \in \text{End}(X)$ ,  $a \oplus b \in \text{End}(X)$ ,  $(-a) \in \text{End}(X)$ ,  $a \circ (b \oplus c) = (a \circ b) \oplus (a \circ c)$ ,  $(a \oplus b) \circ c = (a \circ c) \oplus (b \circ c)$ .

Τι συμπεραίνουμε ως προς τη δομή του  $\text{End}(X)$ ; Ποια είναι η ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων του;

2) Έστω επιπλέον ότι στο  $X$  ορίζεται και κάποιος πολλαπλασιασμός που του προσδίδει δομή δακτυλίου. Δ.ο., για κάθε  $y$  στο  $X$ , οι συναρτήσεις  $L_y, R_y$  τέτοιες ώστε  $L_y(x) = yx$  και  $R_y(x) = xy$  είναι ενδομορφισμοί που ικανοποιούν:

$$L_y \circ L_z = L_{yz}, \quad R_y \circ R_z = R_{zy} \quad \text{και} \quad L_y \circ R_z = R_z \circ L_y.$$

Ποια η σχέση μεταξύ  $L_y$  και  $R_y$  όταν ο δακτύλιος  $X$  είναι αντιμεταθετικός;

3) Δ.ο., εάν  $X$  αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα, η συνάρτηση  $L_y$  είναι ενδομορφισμός δακτυλίου αν και μόνο αν  $y^2=y$  (Σχόλιο: αν μια συνάρτηση διατηρεί την πρόσθεση σπανίως διατηρεί τον πολλαπλασιασμό και αντιστρόφως).

4) Δ.ο. εάν  $X$  κυκλική προσθετική ομάδα (οπότε είναι και αντιμεταθετικός δακτύλιος, δηλαδή  $X=Z$  ή  $Z_m=Z/mZ$  για ακέραιο  $m$ ) τότε κάθε ενδομορφισμός της είναι της

μορφής  $L_\gamma$  για κάποιο  $\gamma$  στο  $X$ . Δ.ο. το ίδιο ισχύει και για την προσθετική ομάδα των ρητών  $(\mathbf{Q}, +)$ , αλλά όχι των μιγαδικών  $(\mathbf{C}, +)$ .

5) Δ.ο. εάν  $X$  διανυσματικός χώρος στο σώμα  $\mathbf{F}$ , το σύνολο  $\mathcal{L}(X)$  των  $\mathbf{F}$ -γραμμικών απεικονίσεων του  $X$  στον εαυτό του είναι υποδακτύλιος του  $\text{End}(X)$  χωρίς υποχρεωτικά να ταυτίζεται. Δ.ο. για  $\mathbf{F}=\mathbf{Z}_2$  τότε  $\mathcal{L}(X) = \text{End}(X)$ . (Σημείωση: χρειάζεται ο ορισμός του γραμμικού μετασχηματισμού από τη Γραμμική Άλγεβρα).

6) (Θεωρούμε δεδομένη την πλήρη αντιστοίχιση μεταξύ  $\mathcal{L}(\mathbf{F}^m)$  και πινάκων  $m \times m$  με στοιχεία στο  $\mathbf{F}$ )

Θέτουμε  $X=(\mathbf{Z}_2)^2$  και εξετάζουμε τον δακτύλιο  $\Delta=\text{End}(X)=\mathcal{L}(X)$ . Δ.ο. ο  $X$  είναι ισόμορφος με την ομάδα  $V_4$  του Klein και ότι ο δακτύλιος  $\Delta$  έχει 16 στοιχεία, ενώ η ομάδα  $\Delta^*=\text{Aut}(X)$  των αντιστρέψιμων στοιχείων έχει 6 στοιχεία και είναι ισόμορφη με την  $S_3$ .

7) (Ίδιες συμβάσεις με το 6): Δ.ο. από τα μη αντιστρέψιμα στοιχεία  $\varphi$  του  $\Delta$  τα τέσσερα ικανοποιούν  $\varphi^2=0$  (μεταξύ τους και το  $\varphi=0$ ) και τα υπόλοιπα 6 ικανοποιούν  $\varphi^2=\varphi$ . Δ.ο. τα έξι αυτά στοιχεία μπορούν να χωριστούν σε τρία ζεύγη με δύο διαφορετικούς τρόπους: συνταιριάζοντας δύο πίνακες όταν είτε έχουν ίδια εικόνα αλλά διαφορετικό πυρήνα, είτε τον ίδιο πυρήνα αλλά διαφορετική εικόνα.

8) (Άσκηση για το σπίτι): Να αναλυθεί ο  $\Delta$  σε τροχιές του  $\Delta^*=\text{Aut}(X)$  κάτω από τη δράση  $\varphi \rightarrow u \circ \varphi \circ u^{-1}, u \in \text{Aut}(X)$ . Να μελετηθούν οι υποδακτύλιοι του  $\Delta$  και ναδειχτεί ότι ο  $\Delta$  δεν έχει γνήσια ιδεώδη. Γενικεύεται αυτό για άλλες επιλογές του  $X$ ;

**Διάρκεια εξέτασης: τρεις ώρες.**