

# ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΩΝ ΚΑΙ ΚΩΔΙΚΩΝ

Μάρτιος 2004

**ΘΕΜΑ 1.** (α) Μία πηγή πληροφορίας παράγει πέντε διαφορετικά σύμβολα  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$  με αντίστοιχες πιθανότητες 0.45, 0.25, 0.15, 0.10, 0.05. Να βρεθεί ο αντίστοιχος δυαδικός κώδικας με τις μεθόδους των Gilbert – Moore και Huffman. Να συγχριθούν οι αποδοτικότητες των δύο κωδίκων.

(β) Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή  $X$  ισχύει,  $H(X^2|X) = 0$ , αλλά να δώσετε ένα περιάδειγμα όπου  $H(X|X^2)$  δεν είναι μηδέν.

**ΘΕΜΑ 2.** (α) Μία πηγή πληροφορίας  $U$  παράγει η διαφορετικά σύμβολα  $u_1, u_2, \dots, u_n$  με αντίστοιχες πιθανότητες  $p(u_1), p(u_2), \dots, p(u_n)$ . Αν  $C$  είναι ο αντίστοιχος  $r$ -αδικός κώδικας ( $r > 2$ ) που παράγεται με τη μέθοδο του Shannon, και το μήκος της κωδικής λέξης που αντιστοιχεί στο σύμβολο  $u_i$  είναι  $\ell_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , να δείξετε ότι:

$$(i) \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n r^{-\ell_i}} \leq 1$$

$$(ii) H_r(U) \leq L < 1 + H_r(U)$$

✓ (β) Μία πηγή πληροφορίας  $U$  παράγει τρία σύμβολα  $u_1, u_2, u_3$  με αντίστοιχες πιθανότητες  $0.7, 0.2, 0.1$ . Να υπολογίσετε τις πιθανότητες όλων των δυνατών μηνυμάτων που αποτελούνται από δύο σύμβολα, καθώς επίσης και το ποσό πληροφορίας για κάθε μήνυμα δύο συμβόλων.  
 $n \leq q^{n-d+1}$   $d=3 \Rightarrow 2t+1$   $t=1$   $M \left\{ \binom{n}{0} + \binom{n}{1}(q-1) + \dots + \binom{n}{e}(q-1)^e \right\} \leq q^n$

(γ) Να δείξετε ότι  $A_3(4, 3) = 9$ , και να κατασκευάσετε τον αντίστοιχο κώδικα.  
 $n=4$   $d=3$   $q=3$   $A_q(n, d) \sum_{k=0}^{n-d} \binom{n}{k} (q-1)^k \leq q^n$

**ΘΕΜΑ 3.** (α) Εστω ότι  $C$  είναι ο δυαδικός κώδικας Hamming  $Ham(r, 2)$ ,  $r \geq 2$ . Να δείξετε ότι κάθε μη-μηδενική κωδική λέξη του  $C^\perp$  έχει βάρος  $2^{r-1}$ .

(β) Να βρείτε τον αριθμό των κωδικών λέξεων βάρους 3 και 4 στον δυαδικό κώδικα Hamming  $Ham(4, 2)$ .

(γ) Να δείξετε ότι ο  $Ham(r, q)$  είναι ένας τέλειος κώδικας διόρθωσης 1-σφάλματος.

$$M \left\{ \binom{4}{0} + \binom{4}{1}(3-1) \right\} \leq 3^4 \Rightarrow$$

$$M(1+4 \cdot 2) \leq 81 \Rightarrow$$

$$9M \leq 81 \Rightarrow M \leq 9$$

$$\star A_q(n, 3) = q^{n-r} \quad n = \frac{q^r - 1}{q - 1} \quad \text{για μάτων ανέρθιο } r \geq 2$$

$$A_3(4, 3) = 3^{4-2} = 3^2 = 9 \quad 4 = \frac{3^r - 1}{3 - 1} \Rightarrow \underline{\underline{r=2}}$$

**ΘΕΜΑ 4.** (α) Έστω ότι  $g(x) = 1 + x + x^3$  είναι το πολυώνυμο γεννήτορας ενός χυκλικού δυαδικού κώδικα  $C$  μήκους 7. Να δείξετε ότι το σύνολο των κωδικών λέξεων άρτιου βάρους του  $C$  είναι επίσης ένας χυκλικός δυαδικός κώδικας και να προσδιορίσετε το πολυώνυμο γεννήτορα, την διάσταση και την ελάχιστη απόσταση του κώδικα αυτού.

(β) Αν  $C$  είναι ένας δυαδικός αυτο-δυϊκός κώδικας, να δείξετε ότι όλες οι κωδικές λέξεις του  $C$  έχουν άρτιο βάρος και ότι  $1 \in C$ .

(γ) Αν  $C$  είναι ένας δυαδικός γραμμικός κώδικας, να δείξετε ότι, είτε όλες οι κωδικές λέξεις του  $C$  έχουν άρτιο βάρος ή ακριβώς μισές έχουν άρτιο βάρος και μισές περιττό βάρος.

Διάρκεια εξέτασης:  $2\frac{1}{2}$  ώρες.