

## ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

### ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ «ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ» ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ / Κατ. Μαθηματικού Εφαρμογών

ΑΘΗΝΑ 14/6/2005, ΗΡΑ:12.00

Θέμα 1°: (a) (Mov. 0.25). Av  $f(x) = \begin{cases} -1, & -3 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 3 \end{cases}$ , να οριστεί

κατάλληλα η  $f(x)$  στα  $0, \pm 3$ , ώστε η σειρά να συγκλίνει παντού στη συνάρτηση.

(β) (Mov. 0.25). Τι τύπου είναι η ΜΔΕ,  $u_y(x, y) = 0$ .

Δώστε δύο λύσεις της.

Θέμα 2°: (a) (Mov. 0.5). Ποια σχέση πρέπει να συνδέει τις συναρτήσεις  $f, h, g$ , ώστε το πρόβλημα:

$$\Delta u(\rho, \varphi) = h(\rho, \varphi), \quad a < \rho < b, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$\frac{\partial u(a, \varphi)}{\partial \rho} = f(\varphi), \quad \frac{\partial u(b, \varphi)}{\partial \rho} = g(\varphi).$$

να είναι επιλόγματο;

(β) (Mov. 1.5). Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(x, y, t) = u_{yy}, \quad (x, y) \in (0, 2) \times (0, 3), \quad t > 0,$$

$$u(0, y, t) = u(2, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, 3, t) = 0,$$

$$u(x, y, 0) = 5(\sin 3\pi x)(\sin \frac{5\pi y}{3}),$$

$$u_t(x, y, 0) = 7(\sin \frac{5\pi x}{2})(\sin 6\pi y).$$

Θέμα 3°: (a) (Mov. 1). Να λυθεί το πρόβλημα Cauchy:

$$xu_x - yu_y = 0,$$

όταν  $u(x, y) = x^2$ , πάνω στην  $c$ :  $y = x, \quad x > 0$ .

(β) (Mov. 1.5). Να υπολογίσετε τη συνάρτηση Green και να δώσετε την ολοκληρωτική μορφή της λύσης του προβλήματος:

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad \underline{x} = (x, y) \in (-\infty, 0) \times (0, \infty),$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = h(x), \quad u(0, y) = g(y)$$

όπου  $g, f, h$ , γνωστές συναρτήσεις και η εξωτερική κάθετος.

Δίνεται η θεμελιώδης λύση για το διαφορικό τελεστή Laplace στον  $\mathbb{R}^2$ :

$$E(x; x') = \frac{1}{2\pi} \ln[(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}.$$

**Θέμα 4°:** (Mov. 2). (α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$xy''(x) + y' + \lambda \frac{1}{x} y(x) = 0, \quad 1 < x < e^\pi, \quad y'(1) = y(e^\pi) = 0.$$

(β) Είναι η εξίσωση σε μορφή αυτοσυγχρόνη; Να δώσετε μία σχέση ορθογωνιότητας που προκύπτει από αυτό το πρόβλημα.

(γ) Να λυθεί, με τη μέθοδο ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (εναλλακτική μέθοδος Fredholm), το ημιομογενές πρόβλημα:

$$x^2 y''(x) + xy' + \Lambda y(x) = 1, \quad 1 < x < e^\pi, \quad y'(1) = y(e^\pi) = 0,$$

όταν  $\Lambda \in \mathbb{R}$ , γνωστή παράμετρος. Να διερευνηθεί η ύπαρξη λύσης για τις διάφορες τιμές του  $\Lambda \in \mathbb{R}$ .

**Θέμα 5°:** (Mov. 2). Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) - \sin x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

$$u_x(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = x - \sin x, \quad 0 < x < \pi.$$

Ποια φυσική διαδικασία περιγράφει το πρόβλημα;

**Θέμα 6°:** (Mov. 1). Με χρήση του μετασχηματισμού Fourier, να λυθεί (τυπικά) το πρόβλημα:

$$u_{xxx} + u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad u = u(x, t),$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad u_x(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

(υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Fourier). Δίνονται:

$$1. \quad F\{u(x, t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{ixs} dx = \hat{u}(s, t),$$

$$2. \quad F^{-1}\{\hat{u}(s, t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(s, t) e^{-ixs} ds = u(x, t),$$

$$3. \quad F\{u_{xx}(x, t)\} = (-is)^2 \hat{u}(s, t),$$

$$4. \quad F^{-1}\{\hat{h}(s)\hat{g}(s)\} = (h * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x - \xi)g(\xi) d\xi,$$

$$5. \quad F^{-1}\{\cos(s^2 t)\} = \frac{1}{\sqrt{2t}} \cos\left(\frac{x^2}{4t} - \frac{\pi}{4}\right).$$