

**Μάθημα: Θεωρία Τελεστών**

Ονοματεπώνυμο .....

**Θ E M A T A**

**Θ1. A)** Έστω  $X$  ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και  $S$  ένα υποσύνολό του.

(i) Να δώσετε τον ορισμό του ορθογωνίου συμπληρώματος  $S^\perp$  του  $S$ .

(ii) Να δείξετε ότι αν το  $S$  είναι πυκνό στον  $X$  τότε είναι  $S^\perp = \{0\}$ .

**B)** Αν  $H$  είναι άπειρης διάστασης μιγαδικός χώρος Hilbert και  $M$  χλειστός υπόχωρός του, να δείξετε ότι  $H = M \oplus M^\perp$ .

\* **Θ2.** Έστω ένας άπειρης διάστασης μιγαδικός χώρος Hilbert  $H$ ,  $\{e_i : i = 1, 2, \dots\}$  μια ορθοκανονική ακολουθία και  $\mathbf{h} \in H$ . Να δείξετε ότι η σειρά  $\sum_{i=1}^{\infty} \langle \mathbf{h}, e_i \rangle e_i$  συγχλίνει σε ένα  $\mathbf{h}' \in H$  τέτοιο ώστε  $\mathbf{h} - \mathbf{h}' \perp e_i$  για κάθε  $i = 1, 2, \dots$

Τι συμπεραίνετε όταν επιπλέον η ακολουθία είναι ορθοκανονική βάση;

**Θ3.** Έστω  $X, Y$  χώροι με νόρμα και  $T : X \rightarrow Y$  μια γραμμική απεικόνιση.

(i) Να ορίσετε πότε η  $T$  λέγεται φραγμένος τελεστής.

(ii) Να δώσετε ένα παράδειγμα τελεστή στο οποίο να φαίνεται ότι η νόρμα του εξαρτάται και από τις δύο νόρμες των  $X, Y$ .

(iii) Να δείξετε ότι ο πολλαπλασιαστικός τελεστής  $M_f : L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b]$ , ( $f \in C[a, b]$ ):

$$(M_f \varphi)(x) = f(x)\varphi(x)$$

είναι φραγμένος και να υπολογίσετε τη νόρμα του.

**Θ4.** Έστω  $H$  ένας άπειρης διάστασης μιγαδικός χώρος Hilbert και  $P \in \mathcal{B}(H)$  ένας ταυτοδύναμος τελεστής.

(i) Να δείξετε ότι ο  $P$  είναι ορθογώνια προβολή αν, και μόνο αν ο  $P$  είναι αυτοσυζυγής.

(ii) Αν ο  $P$  είναι ορθογώνια προβολή,  $M = \mathcal{R}(P)$ , το σύνολο τιμών της  $P$ , και  $A \in \mathcal{B}(H)$  να δείξετε ότι: (α)  $AM \subseteq M$  αν, και μόνο αν  $AP = PAP$ . (β)  $AM \subseteq M$  και  $AM^\perp \subseteq M^\perp$  αν, και μόνο αν  $AP = PA$ .

**Θ5.** Έστω  $H$  ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και  $A \in \mathcal{B}(H)$ .

(i) Να δείξετε ότι ο  $A$  είναι συμπαγής αν, και μόνο αν για κάθε ακολουθία  $(\mathbf{x}_n)$  του  $H$  η ακολουθία  $(A\mathbf{x}_n)$  έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία, αν, και μόνο αν υπάρχει ακολουθία τελεστών πεπερασμένης τάξης η οποία συγκλίνει, ως προς τη νόρμα του  $\mathcal{B}(H)$ , στον  $A$ .

(ii) Να δείξετε ότι ο τελεστής  $T \in \mathcal{B}(\ell_2)$ :  $T\mathbf{x} = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots)$  είναι συμπαγής.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Για το άριστα απαιτούνται τρία ολοκληρωμένα θέματα. Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30'.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**