

Μάθημα: Θεωρία Τελεστών

Ονοματεπώνυμο

Θ E M A T A

Θ1. A) Έστω H ένας άπειρης διάστασης μιγαδικός χώρος Hilbert, $\{\mathbf{e}_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ ένα πεπερασμένο ορθοκανονικό υποσύνολο του H και $\mathbf{h} \in H$. Δείξτε ότι ισχύει: $\sum_{i=1}^n |\langle \mathbf{h}, \mathbf{e}_i \rangle|^2 \leq \|\mathbf{h}\|^2$.

B) Δείξτε ότι σ' ένα διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H κάθε ορθοκανονικό σύνολο είναι αριθμήσιμο (ή πεπερασμένο) και συμπεράνατε ότι δύο οποιεσδήποτε ορθοκανονικές βάσεις του έχουν τον ίδιο πληθυκό αριθμό.

Θ2. Έστω \mathcal{D} ο χώρος των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f \in L^2(-\infty, +\infty)$ τέτοιες ώστε $f' \in L^2(-\infty, +\infty)$ και η γραμμική απεικόνιση $D = \frac{d}{dx} : \mathcal{D} \rightarrow L^2(-\infty, +\infty)$. Δείξτε ότι η \mathcal{D} είναι μη φραγμένος τελεστής ως προς τη νόρμα του $L^2(-\infty, +\infty)$ (στον \mathcal{D}) (είναι $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t)\overline{g(t)}) dt$, ενώ γίνεται φραγμένος τελεστής ως προς τη νόρμα που ορίζει στον \mathcal{D} το εσωτερικό γινόμενο):

$$\langle f, g \rangle_w = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t)\overline{g(t)} + f'(t)\overline{g'(t)}) dt.$$

Τπόδειξη: Θεωρείστε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n(x) = \begin{cases} e^{-nx}, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0, & \mathbb{R} \setminus [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$

Θ3. i) Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ μια γραμμική απεικόνιση. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος τελεστής αν, και μόνο αν υπάρχει $M : 0 < M < +\infty$ τέτοιο ώστε $\|T\mathbf{x}\| \leq M\|\mathbf{x}\|$ για κάθε $\mathbf{x} \in X$.

ii) Έστω H χώρος Hilbert, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots\}$ μια ορθοκανονική βάση του H και $(\lambda_n)_n$ μια φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Ορίζουμε την απεικόνιση: $T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i$, για κάθε $\mathbf{x} \in H$. Να δείξετε ότι η T είναι φραγμένος τελεστής και να υπολογίσετε τη νόρμα του.

iii) Έστω X, Y, Z χώροι Banach. Αν $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$ δείξτε ότι $ST \in \mathcal{B}(X, Z)$ και ισχύει $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$.

Θ4. i) Έστω H, K δύο χώροι Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H, K)$. Να ορίσετε τον Hilbert συζυγή του τελεστή A .

ii) Να δείξετε ότι η απεικόνιση $A \rightarrow A^* : \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες:

$$1. (AB)^* = B^* A^* \quad 2. \|A^* A\| = \|A\|^2$$

B) Να ορίσετε πότε ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται φυσιολογικός και να δείξετε ότι ο T είναι φυσιολογικός αν, και μόνο αν $\|T\mathbf{x}\| = \|T^*\mathbf{x}\|$ για κάθε $\mathbf{x} \in H$.

Θ5. A) Έστω H ένας άπειρης διάστασης μιγαδικός χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$. Να δείξετε ότι ο T είναι αντιστρέψιμος αν, και μόνο αν οι T, T^* είναι κάτω φραγμένοι.

B) (i) Να ορίσετε πότε ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται συμπαγής και να δείξετε ότι αν $T \in \mathcal{B}(H)$ και S είναι συμπαγής, τότε και οι τελεστές TS, ST είναι συμπαγείς.

ii) Να δώσετε ένα παράδειγμα δυο φραγμένων μη συμπαγών τελεστών που το γινόμενό τους να είναι συμπαγής τελεστής.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Για το άριστα απαιτούνται τρία ολοκληρωμένα θέματα. Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30'.