

βλάβη σε διάστημα μικρότερο του χρόνου εγγύησης. Για πόσα χρόνια μπορεί να δίνει εγγύηση έτσι ώστε το ποσοστό των λεβήτων που θα αντικαθιστά να είναι μικρότερο από 2%;

- 4.13. Ο αριθμός  $X$  των ατελειών σε υαλοπίνακες των  $20\text{m}^2$  ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda=0,2$  ατέλειες/ $\text{m}^2$ . Ηλεκτρονική συσκευή καταγράφει τις ατέλειες με πιθανότητα αναγνώρισης  $p=0,9$ . Να προσδιοριστεί: α) Η κατανομή του αριθμού  $Y$  των καταγραφόμενων ατελειών, β) η πιθανότητα  $P(X>3|Y=2)$ .

- 4.14. Σε μια περιοχή η ημερήσια ζήτηση ηλεκτρικής ενέργειας είναι τ.μ.  $X$  ( $\text{Kwh} \times 10^6$ ) που ακολουθεί τη **λογαριθμκανονική** κατανομή νομή

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} x^{-1} \exp \left\{ -\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad x > 0 \quad (\mu=2, \sigma=\frac{1}{2})$$

Εάν το εργοστάσιο ηλεκτροπαραγωγής της περιοχής είναι ισχύος  $20 \times 10^6 \text{Kwh}$  ημερησίως, ποιά η πιθανότητα σε δεδομένη ημέρα να είναι ανεπαρκής η παροχή ηλεκτρικής ενέργειας;

- 4.15. Το χαρακτηριστικό  $X$  ενός προϊόντος ακολουθεί Κανονική κατανομή  $N(5, 0,25 \times 10^{-2})$ . Το προϊόν θεωρείται κατάλληλο όταν  $-10^{-1} < X < 5 \times 10^{-1}$ .

- α) Ποιά το ποσοστό των κατάλληλων στο σύνολο της παραγωγής;  
β) Ποιά η πιθανότητα ώστε μεταξύ 4 κομμάτων εκλεγμένων στην τύχη, να υπάρχουν 3 τουλάχιστον κατάλληλα;

## Κεφάλαιο V

### ΜΕΣΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Η πιθανοθεωρητική συμπεριφορά μιας τ.μ.  $X$  καθορίζεται όπως είδαμε από την αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας  $F$ . Στο κεφάλαιο αυτό θ' ασχοληθούμε με ορισμένα ειδικά χαρακτηριστικά της τ.μ.  $X$ . Τέτοια χαρακτηριστικά είναι π.χ. η μέση τιμή και η διασπορά της, ποσότητες οι οποίες, όταν είναι γνωστές, είναι δυνατόν να δώσουν ικανοποιητικές απαντήσεις σε αρκετά προβλήματα χωρίς να είναι απαραίτητη η πλήρης γνώση της κατανομής  $F$ .

Η μαθηματική θεωρία ολοκλήρωσης που ακολουθεί είναι εκείνη που μας παρέχει τη δυνατότητα να εισάγουμε με κάθε γενικότητα τις σχετικές έννοιες. Στη διεθνή βιβλιογραφία είναι γνωστή σαν θεωρία Ολοκλήρωσης κατά Lebesgue. Στο παρόν περιοριζόμαστε σε μια εισαγωγική παρουσίαση της θεωρίας αυτής. Για πλήρη ανάπτυξη ο αναγνώστης παραπέμπεται π.χ. στο Kingman & Taylor: Introduction to Measure and Probability

#### 1. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Καθ' όλη τη διάρκεια της παραγράφου αυτής θεωρείται δεδομένος ο χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Εστω **μη αρνητική** τ.μ.  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  θεωρούμε την ποσότητα

$$S_n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} P\left(\frac{i}{2^n} < X \leq \frac{i+1}{2^n}\right).$$

Η ποσότητα αυτή είναι γενικά μη αρνητικός αριθμός ή  $+\infty$ . Εξετάζοντας την ακολουθία  $\{S_n: n \in \mathbb{N}\}$  διαπιστώνουμε ότι

$$S_n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2i}{2^{n+1}} \left\{ P\left(\frac{2i}{2^{n+1}} < X \leq \frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) + P\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}} < X \leq \frac{2(i+1)}{2^{n+1}}\right) \right\} \leq$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2i}{2^{n+1}} P\left(\frac{2i}{2^{n+1}} < X \leq \frac{2i+1}{2^{n+1}}\right) + \frac{2i+1}{2^{n+1}} P\left(\frac{2i+1}{2^{n+1}} < X \leq \frac{2i+2}{2^{n+1}}\right) \Bigg\} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^{n+1}} P\left(\frac{k}{2^{n+1}} < X \leq \frac{k+1}{2^{n+1}}\right) = S_{n+1},$$

δηλαδή,  $S_n \leq S_{n+1}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Συνεπώς το  $\lim S_n$  υπάρχει στο  $[0, \infty]$ . Το έργο δίνει νόημα στον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 1.1.** Εστω ο χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  και  $X$  μη αρνητική τ.μ. Θα λέγεται ολοκληρώμα της τ.μ.  $X$  ως προς το μέτρο πιθανότητας  $P$  και θα γράφεται  $\int X(\omega) dP(\omega)$ , ή απλούστερα  $\int X dP$ , το  $\lim S_n$ . Είναι δηλαδή

$$\int X dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{2^n} P\left(\frac{i}{2^n} < X \leq \frac{i+1}{2^n}\right). \quad (1.1)$$

Όταν  $\int X dP < \infty$  τότε η (μη αρνητική) τ.μ.  $X$  ονομάζεται ολοκληρώσιμη ως προς το μέτρο πιθανότητας  $P$ .

Άλλοι ισοδύναμοι τρόποι έκφρασης του ολοκληρώματος μιας μη αρνητικής τ.μ.  $X$  είναι:

α) θεωρούμε την ακολουθία

$$S'_n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+1}{2^n} P\left(\frac{i}{2^n} < X \leq \frac{i+1}{2^n}\right), \quad n \geq 1.$$

Εύκολα προκύπτει ότι

$$S'_n = S_n + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} P\left(\frac{i}{2^n} < X \leq \frac{i+1}{2^n}\right)$$

$$= S_n + \frac{1}{2^n} P(0 < X < \infty),$$

και συνεπώς

$$\lim S'_n = \lim S_n = \int X dP. \quad (1.2)$$

β) Αν για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\xi_i^{(n)} = \{\xi_i^{(n)}; i=0,1,2,\dots\}$  είναι μία επιλογή αριθμών του  $[0, \infty)$  τέτοια ώστε  $\xi_i^{(n)} \in \left(\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right]$  για κάθε  $i \in \{0,1,2,\dots\}$ , τότε για την ακολουθία

$$S_n^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i^{(n)} \cdot P\left(\frac{i}{2^n} < X \leq \frac{i+1}{2^n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

θα έχουμε

$$S_n \leq S_n^{(n)} \leq S'_{n-1} \quad \forall n \geq 1$$

και συνεπώς

$$\int X dP = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(n)}. \quad (1.3)$$

γ) Επίσης αν

$$S_n^* = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+1}{2^n} P\left(\frac{i}{2^n} \leq X < \frac{i+1}{2^n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^* = \int X dP. \quad (1.4)$$

Προκειμένου να οριστεί το ολοκληρώμα για οποιαδήποτε τ.μ.  $X$  και όχι κατ'ανάγκη μη αρνητική χρειαζόμαστε τους παρακάτω συμβολισμούς.

Εστω  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  χώρος πιθανότητας και  $X$  τ.μ. θέτουμε

$$X^+(u) = \max\{X(u), 0\} = \begin{cases} X(u) & \text{αν } X(u) \geq 0, \\ 0 & \text{αν } X(u) < 0, \end{cases}$$

$$X^-(u) = \max\{-X(u), 0\} = \begin{cases} 0 & \text{αν } X(u) \geq 0, \\ -X(u) & \text{αν } X(u) < 0, \end{cases}$$

Οι απεικονίσεις  $X^+, X^-: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  είναι τ.μ. (γιατί;) και μάλιστα μη αρνητικές. Συνεπώς για κάθε μία απ'αυτές έχει νόημα ο προηγούμενος ορισμός του ολοκληρώματος. Ακόμα, ισχύουν οι σχέσεις:  $X = X^+ - X^-$ ,  $|X| = X^+ + X^-$ . Υποενθυμίζουμε επίσης τις συνθήσεις συμβάσεις  $x - (+\infty) = -\infty$ ,  $(+\infty) - x = +\infty$  ενώ δεν ορίζεται η διαφορά  $(+\infty) - (+\infty)$ .

**Ορισμός 1.2.** Θα λέμε ότι ορίζεται το ολοκλήρωμα της τ.μ.  $X$  ως προς το μέτρο πιθανότητας  $P$ , όταν ένα τουλάχιστον από τα  $\int_A X^+ dP$ ,  $\int_A X^- dP$  είναι πεπερασμένο. Τότε μόνο το ολοκλήρωμα της τ.μ.  $X$  συμβολίζεται με  $\int X dP$  και είναι

$$\int X dP = \int X^+ dP - \int X^- dP. \quad (1.5)$$

Όταν και τα δύο ολοκλήρωματα στα δεξιά της παραπάνω σχέσης είναι (πεπερασμένοι) αριθμοί η τ.μ.  $X$  λέγεται ολοκληρώσιμη ως προς το μέτρο πιθανότητας  $P$ , και βέβαια τότε  $|\int X dP| < \infty$ .

Να σημειωθεί ότι για μη αρνητική τ.μ.  $X$  ισχύει  $X = X^+$  και συνεπώς  $\int X dP = \int X^+ dP$ .

**Ορισμός 1.3.** Εστω  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  χώρος πιθανότητας,  $A \in \mathcal{F}$  και  $X$  τ.μ. Θα λέμε ότι ορίζεται το ολοκλήρωμα της τ.μ.  $X$  στο σύνολο  $A$  όταν και μόνο όταν ορίζεται το ολοκλήρωμα  $\int (I_A \cdot X) dP$ , με  $I_A$  τη δείκτη συνάρτηση του ενδεχόμενου  $A$ . Τότε γράφουμε

$$\int_A X dP = \int (I_A \cdot X) dP. \quad (1.6)$$

Όταν  $\int_A X dP$  είναι αριθμός λέμε ότι η τ.μ.  $X$  είναι ολοκληρώσιμη στο σύνολο  $A$  ως προς το μέτρο πιθανότητας  $P$ . Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι

$$\int_A X dP = \int_A X^+ dP - \int_A X^- dP \quad (1.7)$$

**Παρατήρηση:** Για μη αρνητικές τ.μ. επαληθεύεται άμεσα ότι

$$\int_A X dP = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{2^i} P \left\{ \left( \frac{i}{2^i} < X \leq \frac{i+1}{2^i} \right) \cap A \right\} \quad \forall A \in \mathcal{F}. \quad (1.8)$$

Η παρακάτω Πρόταση είναι άμεσα συνέπεια των ορισμών 2 και 3.

**Πρόταση 1.1.** Εστω  $X$  τ.μ. και  $A \in \mathcal{F}$ . Τότε

$$(i) X(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in A \Rightarrow \int_A X dP = 0$$

$$(ii) P(A) = 0 \Rightarrow \int_A X dP = 0.$$

Θα δείξουμε τώρα το παρακάτω.

**Θεώρημα 1.1.** Εστω  $X$  τ.μ. και  $A, B \in \mathcal{F}$ . Αν  $A \cap B = \emptyset$  τότε

$$\int_{A \cup B} X dP = \int_A X dP + \int_B X dP \quad (1.9)$$

με την προϋπόθεση ότι τα ολοκληρώματα ορίζονται.

**Απόδειξη:** Αφού  $A \cap B = \emptyset$  θα έχουμε

$$P \left\{ \left( \frac{i}{2^n} < X \leq \frac{i+1}{2^n} \right) \cap (A \cup B) \right\} = P \left\{ \left( \frac{i}{2^n} < X \leq \frac{i+1}{2^n} \right) \cap A \right\} + P \left\{ \left( \frac{i}{2^n} < X \leq \frac{i+1}{2^n} \right) \cap B \right\}$$

Εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα (1.8) στην τ.μ.  $X^+$  και  $X^-$  προκύπτουν οι σχέσεις

$$\int_{A \cup B} X^+ dP = \int_A X^+ dP + \int_B X^+ dP$$

και

$$\int_{A \cup B} X^- dP = \int_A X^- dP + \int_B X^- dP.$$

Παίρνοντας τώρα τη διαφορά των παραπάνω ολοκληρωμάτων και χρησιμοποιώντας την (1.7) προκύπτει το ζητούμενο. ■

**Ορισμός 1.4.** Θα λέμε ότι οι τ.μ.  $X, Y$  είναι σχεδόν παντού ίσες ως προς το μέτρο πιθανότητας  $P$  και θα γράψουμε  $X=Y$   $P$ -σχεδόν παντού ή, απλούστερα,  $X=Y$   $P$ -σ.π., όταν και μόνο όταν

$$P(X=Y)=1. \quad (1.9)$$

Τούτο είναι ισοδύναμο με: υπάρχει  $N \in \mathcal{F}$  με  $P(N)=0$ , τέτοιο ώστε  $X(\omega)=Y(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega - N$ . Ανάλογη είναι και η σημασία της έκφρασης  $X=Y$   $P$ -σχεδόν παντού στο σύνολο  $A \in \mathcal{F}$ .

Εύκολα τώρα προκύπτει το εξής συμπέρασμα.

Εστω  $X, Y$  τ.μ. τέτοιες ώστε  $X=Y$   $P$ -σχεδόν παντού. Αν ορίζεται το ολοκλήρωμα της τ.μ.  $X$  ως προς το μέτρο πιθανότητας  $P$ , τότε ορίζεται και το ολοκλήρωμα της τ.μ.  $Y$  ως προς το μέτρο  $P$  και είναι

$$\int X dP = \int Y dP.$$

Ετσι αν  $X=0$   $P$ -σχεδόν παντού στο  $A \in \mathcal{F}$ , τότε  $\int_A X dP = 0$ .

## 2. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Θ' αναφερθούμε τώρα στη δυνατότητα έκφρασης του ολοκληρώματος μιας τ.μ.  $X$ , στο χώρο πιθανότητας  $(R, \mathcal{B}, P_X)$  που επάγεται από αυτήν μέσω της  $P_X(B) = P(X^{-1}(B))$ ,  $B \in \mathcal{B}$ , όπου  $\mathcal{B}$  το  $\sigma$ -πεδίο των Borel συνόλων του  $R$ .

Με βάση τη σχέση

$$P\left(\frac{i}{2^n} < X \leq \frac{i+1}{2^n}\right) = P_X\left(\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right], \quad (i=0, 1, 2, \dots)$$

αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$\int X(\omega) dP(\omega) = \int x dP_X(x), \quad (2.1)$$

και γενικότερα για κάθε Borel σύνολο  $B$

$$\int X(\omega) dP(\omega) = \int_B x dP_X(x) \quad (2.2)$$

Τα επόμενα αφορούν τις ειδικές περιπτώσεις διακριτών και συνεχών τ.μ.

### A) Διακριτή περίπτωση

Εστω  $X$  διακριτή, μη-αρνητική τ.μ. με σύνολο τιμών

$$C = \{x_1, x_2, \dots\}.$$

Εστω επίσης

$$A_j = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_j\}, \quad (j=1, 2, \dots)$$

και

$$K_{ni} = \left\{ j : x_j \in \left(\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right] \right\}, \quad (i=0, 1, 2, \dots), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  τώρα έχουμε

$$P\left(\frac{i}{2^n} < X \leq \frac{i+1}{2^n}\right) = \sum_{j \in K_{ni}} P(A_j), \quad (i=0, 1, 2, \dots)$$

Συνεπώς

$$S_n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{2^n} \left( \sum_{j \in K_{ni}} P(A_j) \right) =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j \in K_{ni}} \frac{i}{2^n} P(A_j) \leq$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j \in K_{ni}} x_j P(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j P(A_j).$$

Εξάλλου

$$S_n' = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+1}{2^n} P\left(\frac{i}{2^n} < X \leq \frac{i+1}{2^n}\right) =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j \in K_{ni}} \frac{i+1}{2^n} P(A_j) \geq$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j \in K_{ni}} x_j P(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j P(A_j).$$

Τελικά  $S_n \leq \sum_{j=1}^{\infty} x_j P(A_j) \leq S_n'$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Παίρνοντας τα όρια για  $n \rightarrow \infty$  έχουμε

$$\int X dP = \sum_{j=1}^{\infty} x_j P(X=x_j). \quad (2.3)$$

Παρατήρηση: Ειδικά για την τ.μ.  $X = I_A$ ,  $A \in \mathcal{F}$ , έχουμε  $\int I_A dP = P(A)$ .

### B) Συνεχής περίπτωση

Εστω  $X$  συνεχής τ.μ., έχει δηλαδή απολύτως συνεχή σ.κ.π.  $F$  και συνεπώς υπάρχει συνάρτηση  $f: R \rightarrow [0, +\infty)$  τέτοια ώστε

$$P_X[a, b] = \int_a^b f(x) dx$$

για όλα τα  $a, b \in R$  με  $a < b$ . Υποθέτουμε επιπλέον ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $R$  και ότι ορίζεται το ολοκλήρωμα της τ.μ.  $X$ .

Από το θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  έχουμε:

$$P\left(\frac{i}{2^n} < X \leq \frac{i+1}{2^n}\right) = P_X\left(\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right) = f(\xi_i^{(n)})\left(\frac{i+1}{2^n} - \frac{i}{2^n}\right),$$

$$\text{με} \quad \xi_i^{(n)} \in \left(\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right) \quad (i=0, 1, 2, \dots).$$

Φανερά

$$P\left(\frac{i}{2^n} < X \leq \frac{i+1}{2^n}\right) = P\left(\frac{i}{2^n} < X^+ \leq \frac{i+1}{2^n}\right)$$

για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και κάθε  $i=0, 1, 2, \dots$ .

Με τη βοήθεια της έκφρασης (1.3) στον ορισμό του ολοκληρώματος μη αρνητικών τ.μ. έχουμε

$$\int X^+ dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i^{(n)} f(\xi_i^{(n)}) \left(\frac{i+1}{2^n} - \frac{i}{2^n}\right).$$

Ομοίως

$$\int X^- dP = - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-\infty}^{-1} z_i^{(n)} \cdot f(z_i^{(n)}) \left(\frac{i+1}{2^n} - \frac{i}{2^n}\right)$$

με

$$z_i^{(n)} \in \left(\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right) \quad (i=-1, -2, \dots).$$

Οπότε

$$\int X^+ dP = \int_0^{\infty} x f(x) dx$$

και

$$\int X^- dP = - \int_{-\infty}^0 x f(x) dx,$$

όπου τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται δεξιά είναι τα συνήθη ολοκληρώματα Riemann (γενικευμένα). Συνεπώς

$$\int X dP = \int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \int_0^{\infty} x f(x) dx$$

ή

$$\int X dP = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (2.4)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$  συγκλίνει τότε η τ.μ.  $X$  είναι **ολοκληρώσιμη** ως προς το μέτρο  $P$ .

Με την ίδια διαδικασία αποδεικνύεται ότι

$$\int_{\{a < X \leq b\}} X dP = \int_a^b x f(x) dx.$$

Όταν η σ.π.μ.  $f$  έχει πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών πεπερασμένου άλματος, εργαζόμενοι στα εκατέρωθεν των ασυνεχειών διαστήματα και συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στις ίδιες εκφράσεις και συμπεράσματα.

**Παρατήρηση:** Εξ ορισμού το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann είναι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x f(x) dx,$$

με την προϋπόθεση ότι το δεύτερο μέλος ορίζεται (δεν είναι δηλαδή της μορφής  $(-\infty) + (+\infty)$ ).

Λέγεται ότι  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$  συγκλίνει όταν και μόνο όταν τα όρια του β' μέλους είναι αριθμοί. Αποδεικνύεται ότι το  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$  συγκλίνει όταν και μόνο όταν  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < \infty$ . Να σημειωθεί ότι η ύπαρξη του  $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^0 x f(x) dx$  δεν συνεπάγεται τη σύγκλιση του  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ .

Το Λήμμα που ακολουθεί χρησιμοποιείται συχνά σαν τεχνικό εργαλείο στην απόδειξη των ιδιοτήτων του ολοκληρώματος.

**Λήμμα 2.1.** Εστω τ.μ.  $X \geq 0$ . Τότε υπάρχει ακολουθία μη-αρνητικών τ.μ.  $\{X_n: n \in \mathbb{N}\}$  τέτοια ώστε

$$X_n(\omega) + X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \text{ και } \int X_n dP + \int X dP.$$

**Απόδειξη:** (Σύντομη). θεωρούμε την ακολουθία των τ.μ.

$$X_n = \sum_{i=0}^n \frac{i}{2^n} I_{A_{in}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

όπου

$$A_{in} = \left\{ \omega \in \Omega: \frac{i}{2^n} < X(\omega) \leq \frac{i+1}{2^n} \right\}.$$

Προφανώς η τ.μ.  $X_n$  είναι διακριτή, μη-αρνητική με σύνολο τιμών  $C = \left\{ \frac{i}{2^n}, i=0,1,2,\dots \right\}$  και ισχύει

$$\int X_n dP = \sum_{i=0}^n \frac{i}{2^n} P(A_{in}) = S_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι  $X_n(\omega) + X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$  κι αφού εξ ορισμού  $S_n + \int X dP$  συμπεραίνουμε ότι

$$\int X_n dP + \int X dP.$$

Με τη βοήθεια του Λήμματος αυτού αποδεικνύονται τα επόμενα θεωρήματα.

**Θεώρημα 2.1.** (Μονότονη Σύγκλιση). Αν  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  ακολουθία μη αρνητικών τ.μ. τέτοια ώστε  $X_n + X$  P-σχεδόν παντού τότε η  $X$  είναι P-σχεδόν παντού μη-αρνητική τ.μ. και ισχύει

$$\int X_n dP + \int X dP. \quad (2.5)$$

**Θεώρημα 2.2.** Αν  $X, Y$  τ.μ. ολοκληρώσιμες ως προς  $P$  και  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  τότε η τ.μ.  $\alpha X + \beta Y$  είναι ολοκληρώσιμη ως προς  $P$  και ισχύει

$$\int (\alpha X + \beta Y) dP = \alpha \int X dP + \beta \int Y dP. \quad (2.6)$$

Άμεση συνέπεια του τελευταίου θεωρήματος είναι το παρακάτω.

**Πόρισμα 2.1.**

(i) Η τ.μ.  $X$  είναι ολοκληρώσιμη ως προς το μέτρο  $P$  όταν και μόνο όταν  $\int |X| dP < \infty$ . Τότε ισχύει

$$\left| \int X dP \right| \leq \int |X| dP.$$

(ii) Αν  $X \leq Y$  P-σχεδόν παντού, τότε  $\int X dP \leq \int Y dP$  με την προϋπόθεση ότι τα ολοκληρώματα ορίζονται.

**Θεώρημα 2.3.** (Λήμμα του Fatou). Εστω  $\{X_n, n=1,2,\dots\}$  ακολουθία μη αρνητικών τ.μ. Τότε

$$\liminf \int X_n dP \geq \int (\liminf X_n) dP. \quad (2.7)$$

Οι αποδείξεις αυτών των θεωρημάτων όπως και του επόμενου μπορούν να βρεθούν π.χ. στο Kingman & Taylor: Introduction to Measure and Probability.

**Θεώρημα 2.4.** Εστω  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  ακολουθία τ.μ. τέτοια ώστε

α)  $\lim X_n = X$  P-σχεδόν παντού.

β) Υπάρχει τ.μ.  $Y$  ολοκληρώσιμη ως προς  $P$  τέτοια ώστε για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει  $|X_n| \leq Y$  P-σχεδόν παντού. Τότε η τ.μ.  $X$  είναι ολοκληρώσιμη ως προς  $P$  και

$$\lim \int X_n dP = \int X dP. \quad (2.8)$$

### 3. ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Δίνουμε τώρα την έννοια της μέσης τιμής (μ.τ.) ή αναμενόμενης τιμής μιας τυχασίας μεταβλητής  $X$ . Εστω  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  χώρος πιθανότητας.

**Ορισμός 3.1.** Όταν ορίζεται το ολοκλήρωμα της τ.μ.  $X$  ως προς

το μέτρο πιθανότητας  $P$ , τότε το ολοκλήρωμα αυτό ονομάζεται μέση τιμή (μ.τ.) της τ.μ.  $X$  και συμβολίζεται με  $E(X)$  ή  $\mu$ . Δηλαδή έχουμε

$$\mu = E(X) = \int X dP, \quad (3.1)$$

όταν ένα τουλάχιστον από τα  $\int X^+ dP$  και  $\int X^- dP$  είναι πεπερασμένο.

Υπενθυμίζεται ότι η τ.μ.  $X$  λέγεται ολοκληρώσιμη ως προς  $P$  όταν  $\int X^+ dP < \infty$  και  $\int X^- dP < \infty$ , και τούτο ισοδυναμεί με  $\int |X| dP < \infty$ . Συνεπώς η μέση τιμή μιας τ.μ. είναι πεπερασμένη όταν και μόνο όταν  $E(|X|) < \infty$ .

Εξετάζουμε ειδικότερα τις παρακάτω περιπτώσεις τυχαίων μεταβλητών.

#### Α) Διακριτή περίπτωση

Εστω διακριτή τ.μ.  $X$  με σύνολο τιμών  $C = \{x_1, x_2, \dots\}$  και σ.μ.π  $p_j = P(X=x_j), (j=1, 2, \dots)$ . Η μέση τιμή  $E(X)$  είναι πεπερασμένη όταν και μόνο όταν  $\sum_1^\infty |x_j| p_j < \infty$ . Τότε

$$E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j p_j. \quad (3.2a)$$

#### Β) Συνεχής περίπτωση

Εστω συνεχής τ.μ.  $X$  με σ.π.π.  $f$ . Η μέση τιμή  $E(X)$  είναι πεπερασμένη όταν και μόνο όταν  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < \infty$ . Τότε

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (3.2\beta)$$

#### Παραδείγματα

##### α) Μέση τιμή σταθερής τ.μ.

Εστω τ.μ.  $X$  τέτοια ώστε  $X=c$   $P$ -οχεδόν παντού με  $c \in \mathbb{R}$ . Τότε  $E(X)=c$  (άμεση απόρριση των ιδιοτήτων του ολοκληρώματος).

##### β) Μέση τιμή Διωνυμικής τ.μ.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n \cdot p \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = n \cdot p \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} p^m (1-p)^{n-1-m} \\ &= n \cdot p (p+1-p)^{n-1} = n \cdot p. \end{aligned}$$

##### γ) Μέση τιμή Γεωμετρικής τ.μ.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k p \cdot (1-p)^{k-1} = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1} = \frac{1}{p},$$

αφού ισχύει το γενικό  $\sum_{k=1}^{\infty} k \omega^{k-1} = \frac{\omega}{(1-\omega)^2}$  για  $|\omega| < 1$ .

##### δ) Μέση τιμή της κατανομής Poisson $P(\lambda)$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

##### ε) Μέση τιμή Κανονικής $N(\mu, \sigma^2)$ κατανομής

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu, \end{aligned}$$

αφού το πρώτο ολοκλήρωμα συγκλίνει (γιατί;) και η τιμή του, λόγω συμμετρίας περί το  $\mu$ , είναι 0 και το δεύτερο είναι 1 ως ολοκλήρωμα πάνω στο  $\mathbb{R}$  μιας σ.π.π.

στ) Μέση τιμή της κατανομής Γάμμα  $G(a, p)$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x \frac{x^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\alpha x} dx \\ &= \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} x^p e^{-\alpha x} dx = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} \frac{z^p}{\alpha^{p+1}} e^{-z} dz \\ &= \frac{1}{\alpha \cdot \Gamma(p)} \int_0^{\infty} z^{(p+1)-1} e^{-z} dz = \frac{\Gamma(p+1)}{\alpha \cdot \Gamma(p)} = \frac{p}{\alpha} \end{aligned}$$

αφού  $\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$ .

ζ) Μέση τιμή της κατανομής Cauchy

Η κατανομή Cauchy έχει σ.π.π. την

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ετσι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 d \log(1+x^2) + \int_0^{+\infty} d \log(1+x^2) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(1+x^2) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \log(1+x^2) \right\}, \end{aligned}$$

δεν συγκλίνει δηλαδή το  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$  και συνεπώς δεν ορίζεται η μέση τιμή.

Παρατήρηση: Εν τούτοις

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left\{ \log(1+x^2) \right\}_{-\alpha}^{\alpha} = 0,$$

φαινόμενο για το οποίο μιλήσαμε στην τελευταία Παρατήρηση της § 2.

Τα παρακάτω θεωρήματα είναι αναδιατύπωση των θεωρημάτων 2.2 και 2.4 της προηγούμενης παραγράφου.

**Θεώρημα 3.1.** Εστω  $X, Y$  τ.μ. και  $a, b \in \mathbb{R}$ .

(i) Αν οι  $E(X)$ ,  $E(Y)$  είναι πεπερασμένες τότε η  $E(aX+bY)$  είναι πεπερασμένη και ισχύει:

$$E(aX+bY) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y). \quad (3.3)$$

(ii) Αν  $X \leq Y$   $P$ -σχεδόν παντού τότε

$$E(X) \leq E(Y)$$

με την προϋπόθεση ότι οι μέσες τιμές ορίζονται.

**Θεώρημα 3.2.** Εστω  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  ακολουθία τ.μ. τέτοια ώστε

(α)  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$   $P$ -σχεδόν παντού.

(β) Υπάρχει τ.μ.  $Y$  με  $E(Y)$  πεπερασμένη τέτοια ώστε  $|X_n| \leq Y$   $P$ -σχεδόν παντού για κάθε  $n = 1, 2, \dots$ . Τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = E(X). \quad (3.4)$$

Άμεσο συμπέρασμα των παραπάνω είναι το επόμενο.

**Πόρισμα 3.1.**

(i) Αν  $X$  τ.μ. και η  $E(X)$  ορίζεται, τότε  $|E(X)| \leq E(|X|)$ .

(ii) Αν  $X \geq 0$  και  $E(X) = 0$ , τότε  $P(X=0) = 1$ .

**Απόδειξη**

(i)  $|E(X)| = |E(X^+) - E(X^-)| \leq |E(X^+) + E(X^-)| = E(X^+ + X^-) = E(|X|)$ .

(ii)  $\{X > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \geq \frac{1}{n}\}$ .

Επειδή τα ενδεχόμενα  $\{X \geq \frac{1}{n}\}$ ,  $(n=1, 2, \dots)$  αποτελούν μία μονότονη ακολουθία με όριο το ενδεχόμενο  $\{X > 0\}$ , θα έχουμε

$$P(X > 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \geq \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(I_{\{X \geq \frac{1}{n}\}}).$$

Ομως για κάθε  $n \in \mathbb{N}$

$$I_{\{X \geq \frac{1}{n}\}} \leq n \cdot X$$

και συνεπώς

$$E(I_{\{X \geq \frac{1}{n}\}}) \leq E(n \cdot X) = n \cdot E(X) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Αρα  $P(X > 0) = 0$ .

#### 4. ΡΟΠΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι απαραίτητο για τις έννοιες που εισάγονται παρακάτω. Η απόδειξη του είναι εύκολη αλλά απαιτεί ιδιαίτερη τεχνική και δεν κρίνεται σκόπιμο να παρατεθεί.

**Θεώρημα 4.1.** Εστω  $X$  τ.μ. και  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Borel - μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε

$$E\{g(X)\} = \int g(x) dP_X(x), \quad (4.2)$$

με την προϋπόθεση ότι κάθε μέλος της σχέσης αυτής ορίζεται.

Ειδικότερα,

##### Α) Διακριτή περίπτωση

Εστω διακριτή τ.μ.  $X$  με σύνολο τιμών  $C = \{x_1, x_2, \dots\}$  και σ.μ.π.  $p_j = P(X = x_j)$ . Η μ.τ.  $E\{g(X)\}$  είναι πεπερασμένη όταν και μόνο όταν  $\sum_{j=1}^{\infty} |g(x_j)| p_j < \infty$ . Τότε ισχύει

$$E\{g(X)\} = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) p_j. \quad (4.2a)$$

#### Β) Συνεχής περίπτωση

Εστω συνεχής τ.μ.  $X$  με σ.π.π.  $f$ . Η μ.τ.  $E\{g(X)\}$  είναι πεπερασμένη όταν και μόνο όταν  $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f(x) dx < \infty$ . Τότε ισχύει

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx. \quad (4.2b)$$

**Παράδειγμα 1:** Εστω  $X$  τ.μ. με κατανομή Poisson, παραμέτρου  $\lambda$ . Τότε

$$\begin{aligned} E\{X(X-1)\} &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\ &= e^{-\lambda} \lambda^2 \cdot e^{\lambda} = \lambda^2. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 2:** (Πρόβλημα βελτιστοποίησης). Εμπορος προμηθεύεται ποσότητα  $x$  ενός προϊόντος. Η ζήτηση  $Z$  του προϊόντος αυτού είναι τ.μ. με σ.π.π.  $f(z)$ ,  $z \geq 0$ . Με το τέλος της ημέρας το εμπόρευμα είναι ακατάλληλο προς πώληση. Εάν η τιμή αγοράς είναι  $\alpha$  δρχ. ανά μονάδα βάρους και η τιμή πώλησης  $\beta$  δρχ. ποιά η βέλτιστη ποσότητα που πρέπει να προμηθευτεί καθημερινά;

Το ημερήσιο κέρδος είναι τ.μ.  $Y$  που όπως προκύπτει από τις συνθήκες του προβλήματος δίνεται ως εξής:

$$Y = \beta \cdot \min\{x, Z\} - \alpha x. \quad (4.3)$$

Το μέσο αναμενόμενο ημερήσιο κέρδος είναι ίσο με  $E(Y)$ , δηλαδή

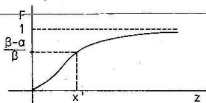
$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^{\infty} (\beta \min\{x, z\} - \alpha x) f(z) dz \\ &= \beta \int_0^{\infty} \min\{x, z\} f(z) dz - \alpha x \int_0^{\infty} f(z) dz \\ &= \beta \int_0^x z f(z) dz + \beta x \int_x^{\infty} f(z) dz - \alpha x \\ &= \beta \int_0^x z f(z) dz + \beta x \{1 - F(x)\} - \alpha x \end{aligned}$$

όπου  $F$  η σ.κ.π. της τ.μ.  $Z$ .

Ετσι λοιπόν το πρόβλημα ανάγεται στη μεγιστοποίηση ως προς  $x$  της συνάρτησης κέρδους  $g(x) = \beta \int_0^x z f(z) dz + \beta \{1 - F(x)\}x - \alpha x$ ,  $x \geq 0$ .

$$\frac{dg}{dx} = \beta x f(x) - \beta x f(x) + \beta \{1 - F(x)\} - \alpha, \quad x \geq 0.$$

Ετσι η  $\frac{dg}{dx} = 0$  ισοδυναμεί με  $\beta \{1 - F(x)\} - \alpha = 0$  ή  $F(x) = \frac{\beta - \alpha}{\beta}$ .



Σχήμα 5.1

**Ορισμός 4.1.** Εστω τ.μ.  $X$ . Λέγεται ότι υπάρχει η ροπή  $v$ -τάξης περί την αρχή,  $v \in \mathbb{N}$ , όταν και μόνο όταν  $E(|X|^v) < \infty$ . Η ροπή  $v$ -τάξης περί την αρχή συμβολίζεται με  $\mu_v'$  και ορίζεται ως ακολούθως

$$\mu_v' = E(X^v). \quad (4.3)$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα  $\mu_v' = \int x^v dP_X(x)$ , και ειδικότερα

α) για διακριτή τ.μ.  $X$  με σύνολο τιμών  $C = \{x_1, x_2, \dots\}$  και σ.μ.π.  $p_j$  ( $j=1, 2, \dots$ ), η ροπή  $v$ -τάξης περί την αρχή  $\mu_v'$  υπάρχει όταν και μόνο όταν  $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^v p_j < \infty$ .

Τότε

$$\mu_v' = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^v p_j \quad (4.4)$$

β) για συνεχή τ.μ.  $X$  με σ.π.π.  $f$ , η ροπή  $v$ -τάξης περί την αρχή  $\mu_v'$  υπάρχει όταν και μόνο όταν  $\int |x|^v f(x) dx < \infty$ . Τότε

$$\mu_v' = \int_{-\infty}^{+\infty} x^v f(x) dx. \quad (4.5)$$

Παρατηρούμε ότι για  $v=1$  η ροπή πρώτης τάξης περί την αρχή, είναι η μέση τιμή  $\mu$  της τ.μ.  $X$ .

**Παράδειγμα 2:** Εστω  $X$  τ.μ. με κατανομή Γάμμα  $G(\alpha, p)$  ( $\alpha, p > 0$ ). Τότε η ροπή 2ης-τάξης περί την αρχή υπάρχει και είναι

$$\mu_2' = E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax} dx = \frac{p(p+1)}{a^2}.$$

Ο υπολογισμός γίνεται όπως στο παράδειγμα (στ') της § 3.

Σχετικά με την ύπαρξη ροπών περί την αρχή ισχύει η παρακάτω Πρόταση.

**Πρόταση 4.1.** Αν υπάρχει η ροπή  $v$ -τάξης περί την αρχή, δηλαδή αν  $E(|X|^v) < \infty$  ( $v \in \mathbb{N}$ ), τότε  $E(|X|^m) < \infty$  για κάθε  $m \in \mathbb{N}$  με  $m < v$ .

**Απόδειξη:** Εύκολη με τη βοήθεια της ανισότητας  $|x|^m \leq 1 + |x|^v$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  όταν  $0 \leq m < v$ . ■

Εστω  $X$  διακριτή τ.μ. με σύνολο τιμών  $C = \{x_1, \dots, x_n\}$  και σ.μ.π.  $p_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ). Απου  $\sum_{j=1}^n p_j = 1$  η μέση τιμή της τ.μ.  $X$  γράφεται

$$E(X) = \frac{p_1 x_1 + \dots + p_n x_n}{p_1 + \dots + p_n}. \quad (4.5)$$

Αναγνωρίζουμε εδώ το κέντρο βάρους συστήματος  $n$  σημείων τοποθετημένων στις θέσεις  $x_1, \dots, x_n$  με μάζες  $p_1, \dots, p_n$  αντίστοιχα. Ανάλογη με τη φυσική σημασία της ροπής αδρανείας περί το κέντρο βάρους είναι στη θεωρία πιθανοτήτων η σημασία της ροπής 2ης τάξης της "μάζας πιθανότητας" (κατανομής) περί τη μέση τιμή.

**Ορισμός 4.2.** Εστω  $X$  τ.μ. με πεπερασμένη μέση τιμή  $\mu = E(X)$ . Λέγεται ότι υπάρχει η **κεντρική ροπή**  $v$ -τάξης,  $v \in \mathbb{N}$ , και συμβολίζεται με  $\mu_v$ , όταν και μόνο όταν  $E(|X - \mu|^v) < \infty$ . Τότε ορίζεται

$$\mu_V = E\{(X-\mu)^V\}. \quad (4.6)$$

Ειδικά η κεντρική ροπή 2ης-τάξης ονομάζεται **διασπορά** της τ.μ. X και συμβολίζεται με  $V(X)$  ή  $\sigma^2$ . Είναι δηλαδή

$$\sigma^2 = V(X) = E\{(X-\mu)^2\}. \quad (4.7)$$

Συνήθως αντί της έκφρασης "υπάρχει η διασπορά της τ.μ. X" θα χρησιμοποιείται η έκφραση: "η τ.μ. X έχει πεπερασμένη διασπορά" ή συντομότερα  $V(X) < \infty$ .

Στις ειδικότερες περιπτώσεις διακριτών ή συνεχών τ.μ. ισχύουν αντίστοιχα:

α) Αν X διακριτή τ.μ. με σύνολο τιμών  $C = \{x_1, x_2, \dots\}$  και σ.μ.π.  $p_j$  ( $j=1, 2, \dots$ ), τότε

$$V(X) = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j - \mu)^2 p_j. \quad (4.8a)$$

β) Αν X συνεχής τ.μ. με σ.π.π. f, τότε

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx. \quad (4.8b)$$

Ανάλογοι τύποι ισχύουν για τις κεντρικές ροπές οποιασδήποτε τάξης  $v \in \mathbb{N}$ .

Μερικές από τις βασικότερες ιδιότητες της διασποράς δίνονται από τις παρακάτω δύο προτάσεις.

**Πρόταση 4.2.** Εστω X τ.μ.

i) Αν  $X=c$  P-σχεδόν παντού, όπου  $c \in \mathbb{R}$ , τότε  $V(X)=0$ .

ii) Αν  $a, \beta \in \mathbb{R}$  τότε  $V(aX+\beta) = \sigma^2 V(X)$ .

**Απόδειξη:** Εύκολη.

**Πρόταση 4.3.** Εστω X τ.μ. τέτοια ώστε  $E(X^2) < \infty$ . Τότε  $V(X) < \infty$  και ισχύει

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2. \quad (4.9)$$

**Απόδειξη:** Από την Πρόταση 4.1 προκύπτει ότι  $E\{|X|\} < \infty$ , δηλαδή η τ.μ. X έχει πεπερασμένη μέση τιμή μ. Εξάλλου

$$\begin{aligned} V(X) &= E\{(X-\mu)^2\} = E(X^2 + \mu^2 - 2\mu X) = \\ &= E(X^2) + E(\mu^2) - 2\mu E(X) = E(X^2) - \mu^2. \end{aligned}$$

Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς μιας τ.μ. X ονομάζεται **τυπική απόκλιση** και συμβολίζεται με σ. Έχουμε δηλαδή  $\sigma = \sqrt{V(X)}$ .

**Παραδείγματα υπολογισμού διασποράς**

α) Διασπορά σταθερούς  $X=c$

Εστω τ.μ.  $X=c$  P-σχεδόν παντού με  $c \in \mathbb{R}$ . Έχουμε ήδη δείξει (βλ. παραδ. α' της §3) ότι  $E(X)=c$ . Ως εκ τούτου προκύπτει επίσης ότι  $E(X^2)=c^2$ . Συνεπώς  $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=0$ .

β) Διασπορά της Διωνυμικής κατανομής  $b(n, p)$

Έχουμε ήδη δείξει (βλ. παράδ. β' της §3) ότι η μ.τ. της Διωνυμικής κατανομής  $b(n, p)$  είναι np. Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} E\{X(X-1)\} &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} p^{k-2} q^{n-k} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{m=0}^{n-2} \binom{n-2}{m} p^m q^{n-2-m} = n(n-1)p^2. \end{aligned}$$

Επειδή τώρα

$$E(X) = E\{X(X-1)\} + E(X)$$

και  $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ , αντικαθιστώντας θα έχουμε

$$V(X) = E\{X(X-1)\} + E(X) - \{E(X)\}^2 = npq.$$

γ) Διασπορά κατανομής Poisson  $P(\lambda)$

Έχουμε από προηγούμενα παραδείγματα  $E(X)=\lambda$  και  $E\{X(X-1)\} = \lambda^2$ . Άρα

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = \lambda^2 + \lambda,$$

και συνεπώς

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

δ) Διασπορά Κανονικής κατανομής  $N(\mu, \sigma^2)$

Αφού  $E(X) = \mu$

$$\text{θα έχουμε} \quad V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

Κάνοντας το μετασχηματισμό  $(x-\mu)/\sigma = z$  λαμβάνουμε

$$V(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες τώρα και τη βοήθεια του γνωστού αποτελέσματος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$$

βρίσκουμε  $V(X) = \sigma^2$ .

ε) Διασπορά της κατανομής Γάμμα  $G(a, p)$

Από προηγούμενα παραδείγματα (βλ. παραδ. στ' της §3 και παραδ. 2 της παραγράφου αυτής) έχουμε  $E(X) = p/a$  και  $E(X^2) = p(p+1)/a^2$ . Συνεπώς

$$V(X) = \frac{p(p+1)}{a^2} - \frac{p^2}{a^2} = \frac{p}{a^2}.$$

Στις επόμενες λίγες γραμμές θα παρουσιάσουμε μία σημαντική ανιστική σχέση γνωστή ως Ανισότητα Chebyshev. Αυτή έχει ως εξής:

**Θεώρημα 4.3.** Εστω  $X$  τ.μ. και  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\alpha) \varphi(x) = \varphi(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\beta) \varphi(x) > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

$$\gamma) \varphi \text{ είναι αύξουσα στο } (0, +\infty).$$

Αν επιπλέον η μέση τιμή  $E(\varphi(X))$  είναι πεπερασμένη, τότε

$$P(|X| \geq x) \leq \frac{E(\varphi(X))}{\varphi(x)} \quad \text{για κάθε } x > 0. \quad (4.10)$$

**Απόδειξη:** Εξ ορισμού έχουμε

$$E(\varphi(X)) = \int \varphi(X) dP.$$

Επειδή  $\varphi(X) \geq 0$ , ισχύει  $\int \varphi(X) dP \geq \int_{\{|X| \geq x\}} \varphi(X) dP$ . Αλλά η  $\varphi$  είναι αύξουσα στο  $(0, +\infty)$  και άρτια στο  $\mathbb{R}$ . Συνεπώς για κάθε  $x > 0$ , είναι  $\varphi(X) \geq \varphi(x)$  στο  $\{|X| \geq x\}$ . Τούτο συνεπάγεται ότι

$$\int_{\{|X| \geq x\}} \varphi(X) dP \geq \int_{\{|X| \geq x\}} \varphi(x) dP = \varphi(x) P(|X| \geq x)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$E(\varphi(X)) \geq \varphi(x) P(|X| \geq x) \quad \text{για κάθε } x > 0. \quad \blacksquare$$

**Ειδικότερα:** Εστω  $X$  τ.μ. με πεπερασμένη διασπορά  $\sigma^2$  και μέση τιμή  $\mu$ . Εφαρμόζοντας την Ανισότητα Chebyshev στην τ.μ.  $X - \mu$  και με  $\varphi(x) = x^2$  παίρνουμε

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad \text{για κάθε } \varepsilon > 0. \quad (4.11)$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 5.1. Εστω  $\{X_n: n=1,2,\dots\}$  αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών τ.μ. με την ιδιότητα  $E(X_n) \leq M$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , όπου  $M > 0$ . Δείξτε ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n < \infty$  π.σ.π. και ότι ισχύει

$$E(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n).$$

Εφαρμογή: Αν  $\{X_n: n=1,2,\dots\}$  ακολουθία μη αρνητικών τ.μ. με την ιδιότητα  $\sum_{n=1}^{\infty} E(X_n) < \infty$  τότε  $\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty$  π.σ.π. και ισχύει

$$E(\sum_{n=1}^{\infty} X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n).$$

- 5.2. Εστω  $\{A_n: n=1,2,\dots\}$  ακολουθία ενδεχομένων με  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$ . Αν  $X$  τ.μ. με  $E(|X|) < \infty$  δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} X dP = 0.$$

Εφαρμογή:  $A_n = \{|X| > n\}$  ( $n=1,2,\dots$ ).

- 5.3. Εστω τ.μ.  $X$ . Αν  $E\{(X-a)^m\}$  είναι πεπερασμένη για κάποιο  $a \in \mathbb{R}$ , δείξτε ότι  $E(X^m)$  πεπερασμένη.

- 5.4. Εστω  $X$  συνεχής τ.μ. με πεπερασμένη μέση τιμή. Αν η σ.π.π.  $f$  είναι συνάρτηση συμμετρική περί το  $c \in \mathbb{R}$  (δηλ.  $f(c+x) = f(c-x)$   $\forall x \in \mathbb{R}$ ) δείξτε ότι  $E(X) = c$ .

- 5.5. Αν  $X$  τ.μ. δείξτε ότι  $E(|X|) \leq \sqrt{E(X^2)}$ .

- 5.6. Εστω  $X$  τ.μ. Poisson με παράμετρο  $\lambda > 0$ . Αν  $E(X^2) = 12$  να βρεθεί το  $\lambda$ .

- 5.7. Αν η τ.μ.  $X$  ακολουθεί Κανονική κατανομή  $N(\mu, \sigma^2)$  να βρείτε την  $E(Y)$  και  $V(Y)$  με  $Y = e^X$  (Λογαριθμοκανονική τ.μ.).

- 5.8. Εστω  $X$  τ.μ. με σ.μ.π.  $P(X=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$  ( $k=1,2,\dots$ ). Υπολογίστε τις  $E(X)$ ,  $E(X(X-1))$ ,  $V(X)$ .

- 5.9. Δείξτε ότι για κάθε  $c \in \mathbb{R}$  ισχύει η ανισότητα

$$V(X) = E(X - E(X))^2 \leq E(X - c)^2.$$

- 5.10. Η τ.μ.  $X$  είναι διακριτή με σ.μ.π. όπως παρακάτω

$x$	-1	0	1
$p_x$	$p$	$q$	$r$

Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ.  $X$  και της τ.μ.  $|X|$ .

- 5.11. Η τ.μ.  $X$  είναι διακριτή με σ.μ.π. όπως παρακάτω

$x$	-1	1
$p_x$	$p$	$q$

Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ.  $X$  και της  $Y = (X+1)^2/2$ .

- 5.12. Προτόν συσκευάζεται σε πακέτα των 500gr. Το βάρος  $X$  (σε gr) του περιεχομένου ενός πακέτου είναι τ.μ. με σ.π.π. την

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{400} (x-480), & 480 < x \leq 500, \\ \frac{1}{400} (520-x), & 500 < x \leq 520. \end{cases}$$

Να προσδιοριστεί η μέση τιμή και διασπορά της τ.μ.  $X$ . Ο κατασκευαστής πωλεί το πακέτο στην τιμή των 200 δρχ. με την υποχρέωση να επιστρέψει τα χρήματα όταν  $X < 485$ . Δεδομένου ότι το κόστος παραγωγής  $Y$  ενός πακέτου εξαρτάται από το βάρος  $X$  σύμφωνα με τη σχέση  $Y = 0,10X + 70$ , να προσδιοριστεί το αναμενόμενο ανά πακέτο κέρδος του κατασκευαστή.

- 5.13. Η θερμοκρασία απόσταξης μιας χημικής ουσίας είναι τ.μ.  $T$  με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $[160^\circ, 280^\circ]$ . Αν  $T \leq 200^\circ$  το προϊόν της απόσταξης πουλιέται προς  $\beta$  δρχ. το λίτρο ενώ αν  $T > 200^\circ$  προς  $\gamma$  δρχ. το λίτρο. Αν το κόστος παραγωγής ενός λίτρου του παραπάνω προϊόντος είναι  $\alpha$  δρχ. να βρεθεί το αναμενόμενο κέρδος ανά λίτρο.

- 5.14. Η σ.π.π. της ταχύτητας  $V$  ενός μορίου αερίου μάζας  $m$  σε απόλυτη θερμοκρασία  $T$  είναι

$$f(v) = a \cdot v^2 e^{-Bv^2}, \quad v > 0, \quad (B = m/2kT),$$

όπου  $k$  η σταθερά Boltzmann και  $a$  σταθερά κανονικοποίησης. Να προσδιοριστεί (α) η σταθερά  $a$ , (β) η μέση τιμή και η διασπορά

ρά της ταχύτητας  $V$  και της κινητικής ενέργειας  $E = \frac{1}{2} mV^2$ .

5.15. Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της Υπεργευμετρικής κατανομής με παραμέτρους  $N, m, n$ .

5.16. Να βρεθεί η μέση τιμή και διασπορά της κατανομής βήτα με σ. π. π.

$$f(x) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}, \quad 0 < x < 1 \quad (p, q > 0).$$

Ποιά η μέση τιμή και η διασπορά της ομοιόμορφης στο διάστημα  $(0,1)$ ; Ποιά η μέση τιμή και η διασπορά της ομοιόμορφης στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$ ;

5.17. Εστω  $X$  τ.μ. με μέση τιμή  $\mu$  και διασπορά  $\sigma^2$ . Εστω επίσης  $y = g(x)$  αναλυτική συνάρτηση του  $x$ . Αναπτύσσοντας κατά Taylor την  $g$  στο σημείο  $\mu$  δείξτε ότι

$$E(Y) = g(\mu) + \frac{1}{2} \sigma^2 g''(\mu)$$

και

$$V(Y) = \{g'(\mu)\}^2 \sigma^2.$$

5.18. Γωνία  $\varphi$  κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα  $(-2^\circ, 2^\circ)$ . Να προσδιοριστεί προσεγγιστικά η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ.  $Y = \eta \mu \varphi$ . Ποιά η ακριβής μέση τιμή και διασπορά της τ.μ.  $Y$ ;

5.19. Εστω ο κυρτός συνδυασμός (μίνιμα) δύο σ.π.π.

$$f(x) = \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_2(x) \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Εάν  $\mu_i$  και  $\sigma_i^2$  η μέση τιμή και η διασπορά της σ.π.π.  $f_i$  ( $i = 1, 2$ ) ποιά η μέση τιμή και διασπορά του μίνιματος  $f(x)$ ;

5.20. (Ανισότητα πληροφορικής). Εστω  $f, g$  δύο σ.π.π. και  $S = \{x \in \mathbb{R} : g(x) > 0\}$ . Τότε η Kullback-Leibler κατεύθυνόμενη απόκλιση

$$J(f, g) = \int_S f(x) \log \frac{f(x)}{g(x)} dx \geq 0.$$

5.21. (Ανισότητα του Jensen). Εάν  $h$  κυρτή στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$  συνάρτηση και  $X$  τ.μ. με  $P(\alpha < X < \beta) = 1$ . Υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχουν οι μέσες τιμές  $E(X)$  και  $E(h(X))$  δείξτε ότι

$$E(h(X)) \geq h(E(X)).$$

## Κεφάλαιο VI

### ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Πολύ συχνά στην πράξη παρουσιάζεται η ανάγκη να περιγράψουμε με δύο ή περισσότερα ποσοστικά χαρακτηριστικά το αποτέλεσμα ενός πειράματος. Επίσης συχνά παρουσιάζεται η ανάγκη να προσδιορίσουμε τυχόν αλληλοεξαρτήσεις μεταξύ αυτών ώστε να έχουμε τη δυνατότητα να προβλέψουμε ορισμένα χαρακτηριστικά όταν γνωρίζουμε τα άλλα.

Ο υδρολόγος μηχανικός π.χ. ενδιαφέρεται για την ένταση  $X_t$  της βροχής κατά τη χρονική στιγμή  $t$ , τη ροή  $Y_{t+h}$  ενός ποταμού κατά τη χρονική στιγμή  $t+h$ , και για τον προσδιορισμό αλληλοεξαρτήσεων μεταξύ αυτών. Επιπλέον για τις διάφορες τιμές του  $t$ , έστω  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , έχει μια ακολουθία (χρονοσειρά) ροών  $Y_{t_1+h}, Y_{t_2+h}, \dots, Y_{t_n+h}$  των οποίων η μελέτη, σε συνδυασμό με την ακολουθία  $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$ , παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι για την πιθανοθεωρητική μελέτη τέτοιων προβλημάτων απαιτείται η χρησιμοποίηση κατανομών και αναφέρονται σε πολλές τυχαίες μεταβλητές ταυτόχρονα.

#### 1. ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Πριν προχωρήσουμε στις πολυμεταβλητές κατανομές μας χρειάζεται η έννοια του Borel-πεδίου του  $\mathbb{R}^n$ . Εστω  $C^n$  η κλάση των  $n$ -διάστατων ορθογωνίων  $[a, b] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ . Το μικρότερο σ-πέδιο υποσύνολων του  $\mathbb{R}^n$  που περιέχει την κλάση  $C^n$  ονομάζεται **Borel-πεδίο** του  $\mathbb{R}^n$  και συμβολίζεται με  $\mathcal{B}^n$ .

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι εξ ορισμού το  $\mathcal{B}^n$  περιέχει το σύνολο  $\{B_1 \times \dots \times B_n : B_i \in \mathcal{B}, i = 1, \dots, n\}$ , αλλά το τελευταίο, όπως εύκολο