ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
2η Σειρά Ασκήσεων στη " Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση "

ακαδ. έτος 2012–13

1. Έστω (a_n) ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε τη συνάρτηση f στο $[1,\infty)$ με $f(x) = a_n$ αν $n \le x < n+1$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι μετρήσιμη με

$$\int_{[1,\infty)} f\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,.$$

Λύση. Η συνάρτηση

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{[n,n+1)}$$

είναι μετρήσιμη και ισχύει

$$\int_{[1,\infty)} f\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{[1,\infty)} \chi_{[n,n+1)}\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,.$$

■

2. Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων στο $E \in \mathcal{M}$.

(α′) Έστω $M \ge 0$ τέτοιο ώστε $\int_E f_n\, dm \le M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_E (\underline{\lim}\, f_n)\ dm \le M\,.$$

(β′) Να αποδειχθεί ότι η ιδιότητα (α′) είναι ισοδύναμη με το λήμμα Fatou, δηλαδή

$$\int_E (\underline{\lim}\, f_n)\ \mathrm{d}m \le \underline{\lim} \int_E f_n\, dm\,.$$

Λύση.

(α′) Από το λήμμα Fatou έχουμε

$$\int_E (\underline{\lim}\, f_n)\ dm \le \underline{\lim} \int_E f_n\, dm \le M\,.$$

(β′) Υποθέτουμε ότι αν $\int_E f_n\, dm \le M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\int_E (\underline{\lim}\, f_n)\ \mathrm{d}m \le M$. Αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$\underline{\lim} \int_E f_n\, \mathrm{d}m \le M\,.$$

Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ από την υπόθεση έχουμε

$$\inf_{k \ge n} \int_E f_k\, \mathrm{d}m \le \int_E f_n\, \mathrm{d}m \le M$$

και επομένως

$$\underline{\lim} \int_E f_n\, dm = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \ge n} \int_E f_k\, dm \right) \le M\,.$$

■

3. Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων στο χώρο $L_1(E)$, $E \in \mathcal{M}$. Αν $f_n \to f$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_1$, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\, dm = 0$$

και $\lim_{n\to\infty} f_n = g$ $\sigma.\pi.$ στο E, να αποδειχθεί ότι $f = g$ $\sigma.\pi.$ στο E.

Λύση. Από το λήμμα Fatou έχουμε

$$\int_E \underline{\lim}\, |f_n - f|\, dm \le \underline{\lim} \int_E |f_n - f|\, dm\,.$$

Επειδή από την υπόθεση $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\, dm = 0$ και η ακολουθία $(|f_n - f|)$ συγκλίνει στη $|g - f|$ $\sigma.\pi.$ στο E, έπεται ότι

$$\int_E |g - f|\, dm = 0\,.$$

Άρα, $f = g$ $\sigma.\pi.$ στο E. ■

4. Υπολογίστε, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^1 (1-x)^n \sin(\pi x)\, dx\,.$$

<u>*Υπόδειξη*</u>. Χρησιμοποιείστε την αντικατάσταση $x = t/n$, $t \in [0, n]$.

Λύση. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = t/n$, $t \in [0, n]$, έχουμε

$$\begin{aligned} n^2 \int_0^1 (1-x)^n \sin(\pi x)\, dx &= \int_0^n n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \sin\left(\frac{\pi t}{n}\right) dt \\ &= \int_0^\infty f_n(t)\, dt\,, \end{aligned}$$

όπου

$$f_n(t) := n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \sin\left(\frac{\pi t}{n}\right) \chi_{(0,n)}(t)\,, \quad t \in (0, \infty)\,,\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Η (f_n) είναι ακολουθία συνεχών και μη αρνητικών συναρτήσεων στο $(0, \infty)$. Επειδή για $t \in (0, \infty)$ είναι

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{\pi t}{n}\right) = \pi t \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi t/n)}{\pi t/n} = \pi \lim_{u\to\infty} \frac{\sin u}{u} = \pi t\,,$$

η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στη $g(t) := e^{-t}\pi t$, $t \in (0, \infty)$. Επίσης

$$f_n(t) = n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \sin\left(\frac{\pi t}{n}\right) \chi_{(0,n)}(t) \le n e^{-t} \cdot \frac{\pi t}{n} = g(t)\,, \quad t \in (0, \infty)$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(t)\, dt &= \pi \int_0^\infty t e^{-t}\, dt \\ &= -\pi \lim_{t\to\infty} t e^{-t} + \pi \int_0^\infty e^{-t}\, dt && \text{(παραγοντική ολοκλήρωση)} \\ &= \pi \end{aligned}$$

συγκλίνει. Επομένως η g είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $(0,\infty)$ με

$$\int_{(0,\infty)} g(t)\,dm(t) = \int_0^\infty g(t)\,dt = \pi\,.$$

Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^1 (1-x)^n \sin(\pi x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} f_n(t)\,dm(t) = \int_{(0,\infty)} g(t)\,dm(t) = \pi\,.$$

■

5. Έστω f Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και έστω $\alpha > 0$. Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^{-\alpha} f(nx)\right) = 0 \text{ σχεδόν για κάθε } x \in \mathbb{R}\,.$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $t = nx$, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |n^{-\alpha} f(nx)|\,dm(x) = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} |n^{-\alpha} f(t)|\,dm(t) = \frac{1}{n^{\alpha+1}}\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dm(t)\,.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \left(1/n^{\alpha+1}\right)$ συγκλίνει (είναι $\alpha+1>1$) και η $f \in L_1(\mathbb{R})$, η σειρά

$$\sum_{n=1}^\infty \int_{\mathbb{R}} |n^{-\alpha} f(nx)|\,dm(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\alpha+1}} \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dm(t) < \infty$$

συγκλίνει. Επομένως, από το θεώρημα Beppo Levi η σειρά $\sum_{n=1}^\infty (n^{-\alpha} f(nx))$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κατά συνέπεια $\lim_{n\to\infty} (n^{-\alpha} f(nx)) = 0$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ■

6. Έστω $f \in L_1(E)$ και έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $E \in \mathcal{M}$. Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \left|\chi_{A_n} - f\right|\,dm = 0\,.$$

(α′) Να αποδειχθεί ότι $\{|f|>2\} \subset \left\{\left|f - \chi_{A_n}\right| > 1\right\}$ και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την ανισότητα Chebyshev να συμπεράνετε ότι

$$|f| \le 2 \text{ σ.π. στο } E\,.$$

(β′) Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \left|\chi_{A_n} - f^2\right|\,dm = 0\,.$$

(γ′) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο A, $A \subset E$, τέτοιο ώστε $f = \chi_A$ σ.π. στο E.

(δ′) Αν $\sum_{n=1}^\infty m(A_n \triangle A) < \infty$, να αποδειχθεί ότι $\chi_{A_n} \longrightarrow \chi_A$ σ.π. στο E.

Λύση.

(α′) Είναι

$$\begin{aligned} m(\{x \in E : |f(x)| > 2\}) &\le m\left(\left\{x \in E : \left|f(x) - \chi_{A_n}(x)\right| > 1\right\}\right) \\ &\le \int_E \left|f - \chi_{A_n}\right|\,dm \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,. \qquad \text{(ανισότητα Chebyshev)} \end{aligned}$$

Επομένως $m(\{x \in E : |f(x)| > 2\}) = 0$ και αυτό συνεπάγεται ότι $|f| \le 2$ σ.π. στο E.

(β′) Επειδή

$$\begin{aligned}\int_E \left|\chi_{A_n} - f^2\right| dm &= \int_E \left|\chi_{A_n}^2 - f^2\right| dm \qquad (\chi_{A_n}^2 = \chi_{A_n})\\ &= \int_E \left|\chi_{A_n} - f\right| \left|\chi_{A_n} + f\right| dm\\ &\le \int_E \left|\chi_{A_n} - f\right| \left(\chi_{A_n} + |f|\right) dm\\ &\le 3\int_E \left|\chi_{A_n} - f\right| dm\,,\end{aligned}$$

έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \left|\chi_{A_n} - f^2\right| dm = 0\,.$$

(γ′) Επειδή

$$\begin{aligned}\int_E |f - f^2|\, dm &= \int_E \left|\left(f - \chi_{A_n}\right) + \left(\chi_{A_n} - f^2\right)\right| dm\\ &\le \int_E \left|\chi_{A_n} - f\right| dm + \int_E \left|\chi_{A_n} - f^2\right| dm\end{aligned}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \left|\chi_{A_n} - f\right| dm = \lim_{n\to\infty} \int_E \left|\chi_{A_n} - f^2\right| dm = 0\,,$$

έχουμε ότι $\int_E |f - f^2|\, dm = 0$. Επομένως $f^2 = f$ $\sigma.\pi.$ στο E και αυτό συνεπάγεται ότι $f = \chi_A$ $\sigma.\pi.$ στο E, όπου A μετρήσιμο υποσύνολο του E.

(δ′) Επειδή

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E \left|\chi_{A_n} - \chi_A\right| dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E \chi_{A_n \triangle A}\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n \triangle A) < \infty\,,$$

από το θεώρημα Beppo Levi η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\chi_{A_n} - \chi_A\right)$ συγκλίνει $\sigma.\pi.$ στο E και κατά συνέπεια $\chi_{A_n} \longrightarrow \chi_A$ $\sigma.\pi.$ στο E.

■

7. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + x^2} \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)\,.$$

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι μετρήσιμη, Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}} f\, dm\,.$$

Λύση. Επειδή $m(\mathbb{Q}) = 0$, αν $g(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$, είναι $f = g$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$. Όμως η g είναι συνεχής και κατά συνέπεια μετρήσιμη. Επομένως και η f θα είναι μετρήσιμη. Αν αποδείξουμε ότι η g είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε και η f θα είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη.

Για να αποδείξουμε ότι η g είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$, αρκεί να δείξουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx$ συγκλίνει απόλυτα. Αυτό όμως ισχύει επειδή

$$|g(x)| = \left|\frac{\sin x}{1 + x^2}\right| \le \frac{1}{1 + x^2}$$

και το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \pi$$

συγκλίνει. Επειδή $f = g$ $\sigma.\pi.$ στο $\mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f\, dm &= \int_{\mathbb{R}} g\, dm \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin x}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\, dx = 0\,. && \text{(η } g \text{ είναι περιττή συνάρτηση)}
\end{aligned}$$

■

Παράδοση των ασκήσεων έως 5/3/2013