ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
1η Σειρά Ασκήσεων στη " Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση "

ακαδ. έτος 2012–13

1. Έστω (a_n) πραγματική ακολουθία και έστω $A_n := (-\infty, a_n)$.

   (α′) Να αποδειχθεί ότι
   $$(i) \quad (-\infty, \underline{\lim}\, a_n) \subseteq \underline{\lim}\, A_n \subseteq (-\infty, \underline{\lim}\, a_n]$$
   και
   $$(ii) \quad (-\infty, \overline{\lim}\, a_n) \subseteq \overline{\lim}\, A_n \subseteq (-\infty, \overline{\lim}\, a_n]\,.$$

   (β′) Αν $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n = \lim_{n\to\infty} A_n$, να αποδειχθεί ότι το όριο $\lim_{n\to\infty} a_n$ υπάρχει(μπορεί να ισούται και με $\pm\infty$). Να αποδειχθεί ότι γενικά το αντίστροφο δεν ισχύει.

   Λύση.

   (α′) Αν $x \in (-\infty, \underline{\lim}\, a_n)$, δηλαδή $x < a_n$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x < a_n$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως $x \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k$ και κατά συνέπεια $x \in \underline{\lim}\, A_n$. Δηλαδή $(-\infty, \underline{\lim}\, a_n) \subseteq \underline{\lim}\, A_n$.
   Αν $x \in \underline{\lim}\, A_n$, τότε υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x \in \bigcap_{k=n_1}^{\infty} A_k$. Δηλαδή $x \in A_k$ για κάθε $k \geq n_1$. Επομένως $x < a_k$ για κάθε $k \geq n_1$ και αυτό συνεπάγεται ότι $x \leq \underline{\lim}\, a_n$. Δηλαδή $\underline{\lim}\, A_n \subseteq (-\infty, \underline{\lim}\, a_n]$.
   Ανάλογη είναι η απόδειξη της (ii).

   (β′) Αν $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n = \lim_{n\to\infty} A_n$, από τις (i) και (ii) έπεται ότι
   $$(-\infty, \overline{\lim}\, a_n) \subseteq (-\infty, \underline{\lim}\, a_n]$$
   οπότε $\overline{\lim}\, a_n < \underline{\lim}\, a_n$. Επειδή $\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$, συμπεραίνουμε ότι $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n$ και επομένως το όριο $\lim_{n\to\infty} a_n$ υπάρχει(μπορεί να ισούται και με $\pm\infty$). Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πράγματι, αν $a_n = (-1)^n/n$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ και
   $$\underline{\lim}\, A_n = (-\infty, 0) \subset (-\infty, 0] = \overline{\lim}\, A_n\,.$$

   ■

2. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και έστω $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ μία συνάρτηση με $\mu(A) < +\infty$ για κάποιο $A \in \mathcal{A}$. Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

   (i) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ με $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Δηλαδή το μ είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο.

   (ii) $\mu(\emptyset) = 0$ και $\forall A, B \in \mathcal{A}$: $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

   (iii) $\forall A, B \in \mathcal{A} : \mu(A \triangle B) + \mu(A \cap B) = \mu(A \cup B)$.

   Αν το μ είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο, τότε για κάθε αριθμήσιμη οικογένεια (A_n) ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων είναι
   $$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

   Λύση. $\underline{(i) \Rightarrow (ii)}$: Αν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < +\infty$, τότε $A \cap \emptyset = \emptyset$ και από τη (i) έχουμε
   $$\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset) \Rightarrow \mu(\emptyset) = 0\,.$$

Αν $A, B \in \mathcal{A}$, χρησιμοποποιώντας τη (i) έχουμε

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &= \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) && (A \cap (B \setminus A) = \emptyset) \\ &= \mu(A) + \mu(B) && ((B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset) \end{aligned}$$

<u>$(ii) \Rightarrow (iii)$</u>: Εφαρμόζουμε τη (ii) για τα μετρήσιμα σύνολα $A \triangle B$ και $A \cap B$. Τότε,

$$\begin{aligned} \mu(A \triangle B) + \mu(A \cap B) &= \mu\left((A \triangle B) \cup (A \cap B)\right) + \mu\left((A \triangle B) \cap (A \cap B)\right) \\ &= \mu(A \cup B) + \mu(\emptyset) = \mu(A \cup B)\,. \end{aligned}$$

<u>$(iii) \Rightarrow (i)$</u>: Έστω $A, B \in \mathcal{A}$ με $A \cap B = \emptyset$. Από την (iii) για το ζεύγος των μετρήσιμων συνόλων $(A \cup B,\, B)$ έχουμε

$$\mu\left((A \cup B) \triangle B\right) + \mu\left((A \cup B) \cap B\right) = \mu\left((A \cup B) \cup B\right)\,,$$

οπότε

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B)\,.$$

Υποθέτουμε ότι το μ ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο. Έστω $A, B \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq B$. Επειδή τα σύνολα A και $B \setminus A$ είναι ξένα, από τη (i) έχουμε

$$\mu(B) = \mu\left(A \cup (B \setminus A\right) = \mu(A) + m(B \setminus A)$$

και επομένως $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Έστω (A_n) αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων. Επαγωγικά, για κάθε $N \in \mathbb{N}$ από τη (i) έχουμε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$. Επομένως

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)\,, \quad \text{για κάθε } N \in \mathbb{N}\,.$$

Άρα,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

■

3. Έστω ο μετρήσιμος χώρος $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ και έστω $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ με

$$\nu(A) = \begin{cases} 0 & \text{αν } A = \emptyset \\ \sum\limits_{n \in A} \frac{1}{n^2} & \text{αν το } A \text{ είναι πεπερασμένο σύνολο και δεν περιέχει το } 0 \\ +\infty & \text{αν το } A \text{ είναι απειροσύνολο ή το } A \text{ περιέχει το } 0\,. \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι το ν είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο. Είναι το ν σ-αθροιστικό θετικό μέτρο;

Λύση.

(α′) Θα δείξουμε ότι το ν είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο.
Έστω A και B ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του $\mathbb{N}$
1η περίπτωση : Το 0 ανήκει στο $A \cup B$. Από τον ορισμό του ν είναι $\nu(A \cup B) = \infty$. Επειδή $0 \in A$ ή $0 \in B$, είναι $\nu(A) + \nu(B) = \infty$ και επομένως

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)\,.$$

2η περίπτωση : Το 0 δεν ανήκει στο $A \cup B$. Το $A \cup B$ είναι πεπερασμένο σύνολο ή απειροσύνολο.
– Αν το $A \cup B$ είναι πεπερασμένο, τα A, B είναι πεπερασμένα σύνολα και επομένως

$$\nu(A \cup B) = \sum_{n \in A \cup B} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \in B} \frac{1}{n^2} = \nu(A) + \nu(B)\,.$$

– Αν το $A \cup B$ είναι απειροσύνολο, τότε είτε το A είναι απειροσύνολο ή το B είναι απειροσύνολο και επομένως

$$\nu(A \cup B) = \infty = \nu(A) + \nu(B)\,.$$

Άρα το ν είναι ένα πεπερασμένα αθροιστικό θετικό μέτρο.

(β′) Αν $A_n = \{n\}$, τότε

$$\nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}\right) = \nu(\mathbb{N}) = \infty$$

ενώ

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty\,.$$

Δηλαδή

$$\nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}\right) \neq \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(\{n\})$$

και επομένως το ν δεν είναι σ-αθροιστικό θετικό μέτρο.

■

4. Έστω $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ το σύνολο των ρητών αριθμών και έστω

$$I_{k,n} := \left(r_n - \frac{1}{k2^{n+1}}, r_n + \frac{1}{k2^{n+1}}\right),\ A_k := \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{k,n}\ ,\ \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}\,.$$

Αν $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, ποιο είναι το μέτρο Lebesgue του A; Είναι $A = \mathbb{Q}$;

<u>*Σημείωση*</u>. Είναι γνωστό ότι το σύνολο των άρρητων αριθμών $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν είναι ένωση αριθμήσιμου το πλήθος κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$(προκύπτει εύκολα από το θεώρημα κατηγορίας του Baire).

Λύση. Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $I_{k+1,n} \subset I_{k,n}$, η (A_k) είναι φθίνουσα ακολουθία ανοικτών συνόλων με μέτρο Lebesgue

$$m(A_k) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{k,n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(I_{k,n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k2^n} = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{k}\,.$$

Επομένως $\lim_{k \to \infty} m(A_k) = 0$.
Το $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ είναι ένα σύνολο Borel. Επειδή η (A_k) είναι φθίνουσα ακολουθία ανοικτών συνόλων με $m(A_k) < \infty$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$m(A) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \to \infty} m(A_k) = 0\,.$$

Είναι $A \neq \mathbb{Q}$. Αν υποθέσουμε ότι $A = \mathbb{Q}$, τότε

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus A_k)$$

δηλαδή το σύνολο των άρρητων αριθμών $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ είναι ένωση αριθμήσιμου το πλήθος κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Άτοπο, επειδή από το θεώρημα κατηγορίας του Baire το $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ δεν είναι ένωση αριθμήσιμου το πλήθος κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. ■

5. Για $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, a σταθερό, ορίζουμε την οικογένεια

$$\mathcal{T}_a := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A + a \in \mathfrak{B}\} ,$$

όπου $A + a = \{x + a : x \in A\}$ και $\mathfrak{B}$ η Borel σ-άλγεβρα.

(α′) Να αποδειχθεί ότι η $\mathcal{T}_a$ είναι μία σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$.

(β′) Να αποδειχθεί ότι $\mathfrak{B} = \mathcal{T}_a$ (δηλαδή η Borel σ-άλγεβρα είναι αναλλοίωτη ως προς τη μεταφορά).

(γ′) Για κάθε $A \in \mathfrak{B}$ θέτουμε $\mu(A) := m(A + a)$, όπου m είναι το μέτρο Lebesgue. Να αποδειχθεί ότι το μ είναι ένα σ-αθροιστικό θετικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ και να συμπεράνετε ότι $m(A + a) = m(A)$ για κάθε $A \in \mathfrak{B}$.

Λύση.

(α′) Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{T}_a$ είναι μία σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$.
– Επειδή $\mathbb{R} + a = \mathbb{R} \in \mathfrak{B}$, το $\mathbb{R} \in \mathcal{T}_a$.
– Έστω $A \in \mathcal{T}_a$. Τότε

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{T}_a &\Leftrightarrow A + a \in \mathfrak{B} && \text{(ορισμός της } \mathcal{T}_a) \\ &\Leftrightarrow (A + a)^c \in \mathfrak{B} && (\mathfrak{B} \text{ είναι } \sigma\text{-άλγεβρα}) \\ &\Leftrightarrow A^c + a \in \mathfrak{B} && ((A + a)^c = A^c + a) \\ &\Leftrightarrow A^c \in \mathcal{T}_a\,. && \text{(ορισμός της } \mathcal{T}_a) \end{aligned}$$

– Έστω (A_n) αριθμήσιμη οικογένεια στοιχείων της $\mathcal{T}_a$. Επειδή $A_n + a \in \mathfrak{B}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η $\mathfrak{B}$ είναι σ-άλγεβρα, $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n + a) \in \mathfrak{B}$. Τότε

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + a = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n + a) \in \mathfrak{B}$$

και επομένως $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{T}_a$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι η $\mathcal{T}_a$ είναι μία σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$.
<u>*Σημείωση*</u>. Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$(A + a)^c = A^c + a \quad \text{και} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n + a) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + a\,.$$

(β′) Θα δείξουμε ότι $\mathfrak{B} = \mathcal{T}_a$.
– Θα αποδείξουμε πρώτα ότι $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}_a$. Επειδή $(x, y) + a = (x + a, y + a) \in \mathfrak{B}$, το ανοικτό και φραγμένο διάστημα $(x, y) \in \mathcal{T}_a$. Όμως η Borel σ-άλγεβρα $\mathfrak{B}$ παράγεται από τα ανοικτά και φραγμένα διαστήματα. Επομένως $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}_a$.
– Θα αποδείξουμε τώρα ότι $\mathcal{T}_a \subseteq \mathfrak{B}$. Έστω $A \in \mathcal{T}_a$. Τότε $A + a \in \mathfrak{B}$. Αν αντικαταστήσουμε το a με το $-a$, αποδείξαμε προηγουμένως ότι $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}_{-a}$. Επομένως $A + a \in \mathfrak{B} \subseteq \mathcal{T}_{-a}$ και κατά συνέπεια $(A + a) - a = A \in \mathfrak{B}$. Άρα $\mathcal{T}_a \subseteq \mathfrak{B}$.

(γ′) – Επειδή $\emptyset + a = \emptyset$, είναι $\mu(\emptyset) = m(\emptyset) = 0$.
– Έστω (A_n) αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο συνόλων Borel. Τότε

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + a = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n + a)\,,$$

όπου $(A_n + a)$ είναι ξένα ανά δύο σύνολα Borel. Επομένως

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= m\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + a\right) && \text{(ορισμός του } \mu\text{)} \\
&= m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n + a)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n + a) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)
\end{aligned}$$

και άρα το μ είναι σ-αθροιστικό θετικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.
Επειδή για κάθε ανοικτό και φραγμένο διάστημα (x, y) είναι

$$\mu((x, y)) = m((x, y) + a) = m((x + a, y + a)) = m((x, y))\,,$$

από γνωστό θεώρημα έπεται ότι $\mu = m$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ισχύει $m(A + a) = m(A)$ για κάθε $A \in \mathfrak{B}$ (αυτό φυσικά είναι γνωστό αποτέλεσμα του μέτρου Lebesgue).

■

6. Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση στο μετρήσιμο σύνολο E. Τότε υπάρχουν ακολουθίες απλών συναρτήσεων (s_n) και (t_n) στο E, τέτοιες ώστε η (s_n) είναι αύξουσα, η (t_n) είναι φθίνουσα και $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n = f$ ομοιόμορφα στο E.

Λύση. Επειδή η συνάρτηση f είναι φραγμένη, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $-N < f < N$ στο E. Για κάθε $n \geq N$ θεωρούμε τη διαμέριση $P_n = \{y_0, y_1, \ldots, y_{m(n)}\}$ του $[-N, N]$ με

$$\|P_n\| = \max\{y_k - y_{k-1} : 1 \leq k \leq m(n)\} < \frac{1}{n}\,.$$

Αν

$$I_k = [y_k - y_{k-1}) \text{ και } E_k = f^{-1}(I_k) = \{x \in E : y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}\ ,\ 1 \leq k \leq m(n)\,,$$

τα E_k είναι μετρήσιμα υποσύνολα του E. Ορίζουμε τις απλές συναρτήσεις φ_n και ψ_n με

$$\varphi_n := \sum_{k=1}^{m(n)} y_{k-1}\chi_{E_k} \quad \text{και} \quad \psi_n := \sum_{k=1}^{m(n)} y_k\chi_{E_k}\,.$$

Για $x \in E$ υπάρχει μοναδικό k, $1 \leq k \leq m(n)$, τέτοιο ώστε $y_{k-1} \leq f(x) < y_k$ και επομένως

$$\varphi_n(x) = y_{k-1} \leq f(x) < y_k = \psi_n(x)\,.$$

Επειδή $y_k - y_{k-1} < 1/n$, παρατηρούμε ότι

$$0 \leq f - \varphi_n \leq \psi_n - \varphi_n < \frac{1}{n} \text{ στο } E$$

και

$$0 \leq \psi_n - f \leq \psi_n - \varphi_n < \frac{1}{n} \text{ στο } E\,.$$

Δηλαδή

$$0 \leq f(x) - \varphi_n(x) < \frac{1}{n} \text{ και } 0 \leq \psi_n(x) - f(x) < \frac{1}{n}\,, \text{ για κάθε } x \in E \text{ και για κάθε } n \geq N\,.$$

Άρα $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \psi_n = f$ ομοιόμορφα στο E.

Έστω $s_n := \max\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ και $t_n := \min\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. Τότε η (s_n) είναι αύξουσα και η (t_n) είναι φθίνουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων με $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n = f$ ομοιόμορφα στο E. ■

Παράδοση των ασκήσεων έως 5/3/2013