Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστήμων
Τομέας Μαθηματικών

Θεωρία Γραφημάτων
3 Μαρτίου 2015

- **Διάρκεια: 2 ½ ώρες.**
- **Καλή επιτυχία.**

Θέμα 1ο [redacted]

Ορίζουμε ως **γέφυρα** ενός συνεκτικού γραφήματος G μια ακμή $e \in E(G)$ για την οποία ισχύει ότι το $G - e$ δεν είναι συνεκτικό. Δείξτε ότι ένα απλό κανονικό συνεκτικό διμερές γράφημα με βαθμό τουλάχιστον 2, δεν περιέχει γέφυρα.

Θέμα 2ο [redacted]

Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G με $n \geq 5$ κορυφές, διάμετρο 2 και μια κορυφή τομής. Δείξτε ότι το **συμπληρωμάτικό** του γράφημα $\bar{G}$ έχει μεμονωμένη κορυφή.

Θέμα 3ο [redacted]

Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G και κορυφή $x \in V(G)$. Ορίζουμε την **βαρυκεντρικότητα** της x ως $s(x) = \sum_{v \in V(G)} \operatorname{dist}(x, v)$. Έστω δέντρο T και αυθαίρετη κορυφή του $x \in V(T)$ που δεν είναι φύλλο. Να δειχθεί ότι για κάθε $y, z \in N_T(x)$ ισχύει $2s(x) < s(y) + s(z)$, όπου $N_T(x)$ είναι το σύνολο των γειτονικών κορυφών της x στο T.

Θέμα 4ο [redacted]

Έστω G ένα απλό συνεκτικό γράφημα. Ένας 2-παράγοντας είναι ένα παραγόμενο υπογράφημα που αποτελείται από ξένους μεταξύ τους κύκλους. Έστω G ένα 4-κανονικό απλό γράφημα. Να δειχθεί ότι το σύνολο των ακμών του G αναλύεται σε δύο ξένους μεταξύ τους 2-παράγοντες, δηλαδή υπάρχουν δύο 2-παράγοντες F_1 και F_2 του G για τους οποίους $E(F_1) \cap E(F_2) = \emptyset$ και $E(F_1) \cup E(F_2) = E(G)$.

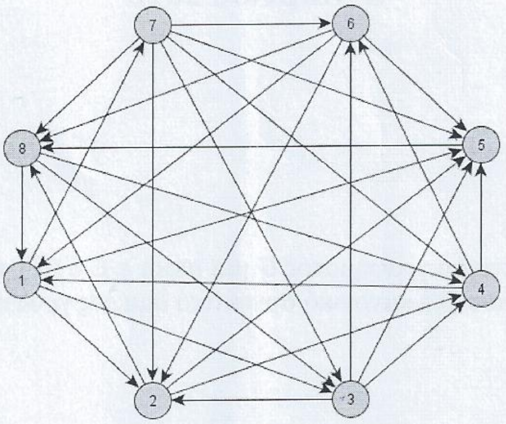
Θέμα 5ο [redacted]

Να δείξετε ότι ένα απλό, συνεκτικό, επίπεδο γράφημα με τουλάχιστον 4 κορυφές έχει τουλάχιστον 3 κορυφές βαθμού μικρότερου του 6.

Γυρίστε σελίδα...

Θέμα 6^{o} [redacted]

Ένα **τουρνουά (*tournament*)** είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ τέτοιο ώστε για κάθε ζεύγος κορυφών $u, v \in V$, ακριβώς μία από τις ακμές $(u, v), (v, u)$ ανήκει στο E. Για παράδειγμα, το παρακάτω γράφημα είναι ένα τουρνουά.



i. Να δείξετε ότι σε ένα τουρνουά με $n+1$ κορυφές, αν θεωρήσουμε μία οποιαδήποτε κορυφή u, και μία οποιαδήποτε αρίθμηση $v_1, \ldots, v_n$ των υπολοίπων κορυφών, τότε ισχύει **τουλάχιστον ένα** από τα παρακάτω:
   a. Η u συνδέεται με την v_1
   b. Η v_n συνδέεται με την u
   c. Υπάρχει δείκτης $k, 1 \leq k \leq n-1$, τέτοιος ώστε η v_k συνδέεται με την u και η u συνδέεται με την v_{k+1}

ii. Ένα **μονοπάτι Hamilton** σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα είναι ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι το οποίο περνά από κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά. Να αποδειχθεί με επαγωγή, ότι ένα τουρνουά έχει πάντοτε ένα μονοπάτι Hamilton.
Σύσταση: Να γίνει χρήση της ιδιότητας που περιγράφει το πρώτο σκέλος του ερωτήματος.

iii. Παρατηρήστε στο παραπάνω γράφημα ότι μπορούμε να πάμε στην κορυφή 5 από οποιαδήποτε άλλη κορυφή μέσω ενός μονοπατιού μήκος το πολύ 2. Την ίδια ιδιότητα έχει και η κορυφή 3. Να δειχθεί με επαγωγή ότι κάθε τουρνουά περιέχει μία κορυφή η οποία είναι προσπελάσιμη από όλες τις άλλες κορυφές μέσω μονοπατιού μήκους το πολύ 2.