

Θεωρία Γραφημάτων
18 Σεπτεμβρίου 2014

- Διάρκεια: 2 ½ ώρες.
- Καλή επιτυχία.

Θέμα 1^ο

Ορίζουμε ως **γέφυρα** ενός συνεκτικού γραφήματος G μια ακμή $e \in E(G)$ για την οποία ισχύει ότι το $G - e$ δεν είναι συνεκτικό. Δείξτε ότι ένα απλό κανονικό συνεκτικό διμερές γράφημα με βαθμό τουλάχιστον 2, δεν περιέχει γέφυρα.

Θέμα 2^ο

Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G με $diam(G) > 3$. Να δειχθεί ότι $diam(\bar{G}) < 3$, όπου \bar{G} είναι το συμπληρωματικό γράφημα του G .

Θέμα 3^ο

Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G και κορυφή $x \in V(G)$. Ορίζουμε την **βαρυκεντρικότητα** της x ως $s(x) = \sum_{v \in V(G)} \text{dist}(x, v)$. Έστω δέντρο T και αυθαίρετη κορυφή του $x \in V(T)$ που δεν είναι φύλλο. Να δειχθεί ότι για κάθε $y, z \in N_T(x)$ ισχύει $2s(x) < s(y) + s(z)$, όπου $N_T(x)$ είναι το σύνολο των γειτονικών κορυφών της x στο T .

Θέμα 4^ο

Έστω ότι σε ένα απλό συνεκτικό γράφημα G οι κύκλοι περιττού μήκους έχουν ανά δύο τουλάχιστον μία κοινή ακμή (δηλαδή δεν υπάρχει ζευγάρι περιττών κύκλων που να είναι πλευρικά ξένοι). Τότε, για το χρωματικό αριθμό του G ισχύει ότι $\chi(G) \leq 5$.

Θέμα 5^ο

Να δείξετε ότι ένα απλό, συνεκτικό, επίπεδο γράφημα με τουλάχιστον 4 κορυφές έχει τουλάχιστον 3 κορυφές βαθμού μικρότερου του 6.

Θέμα 6^ο

- Έστω δένδρο $T(V, E)$, με $|V| = n$ όπου n άρτιος. Ορίζουμε το σύνολο E' των ακμών e του δένδρου για τις οποίες το $T - e$ αποτελείται από δυο συνιστώσες με περιττό πλήθος κορυφών η κάθε μία. Το $T - e$ είναι το γράφημα που προκύπτει αν από το δένδρο T διαγραφεί η ακμή e . Δείξτε ότι κάθε κορυφή στο γράφημα $G(V, E')$ έχει περιττό βαθμό.
- Δείξτε ότι κάθε δένδρο $T(V, E)$, με $|V| = n$, $|E| = e$ μπορεί να προσανατολιστεί (δηλαδή να γίνει ένα κατευθυνόμενο γράφημα με το να δώσουμε κατεύθυνση σε κάθε ακμή) έτσι ώστε για κάθε κορυφή v του κατευθυνόμενου γραφήματος να ισχύει $|\deg^+(v) - \deg^-(v)| \leq 1$. Χρησιμοποιήστε επαγωγή στο πλήθος των κορυφών.