



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

Τομέας Μαθηματικών

Πολυτεχνειόπολη - Ζωγράφου ΑΘΗΝΑ - 157 80

ΤΗΛ. : 772 3291, FAX : 772 1775

ΕΞΕΤΑΣΗ 3<sup>ΟΥ</sup> ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΤΙΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

23 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2012

**ZHTHMA PΡΩΤΟ:**

α) i) Έστω  $f, g, h$  και  $h$  είναι τρεις συναρτήσεις  $C^2(I)$ . Διατυπώστε και αποδείξτε τη σχέση που συνδέει τη γραμμική ανεξαρτησία τους με τη Wronskian τους. (μον. 1.25)

ii) Να βρεθούν όλες οι τιμές της σταθεράς  $a \in \mathbb{R}$  για τις οποίες όλες οι λύσεις της  $x^2y'' + \alpha xy' + \frac{5}{2}y = 0, x > 0$  τείνουν στο μηδέν όταν  $x \rightarrow 0$ . (μον. 0.75)

β) Να βρεθεί ένας τύπος με ολοκληρώματα για μια μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης  $y''' - 3y'' + 3y' - y = g(t)$  (μον. 1)

**ZHTHMA ΔΕΥΤΕΡΟ:**

α) Να βρεθούν τα ιδιάζοντα σημεία της διαφορικής εξίσωσης  $(x-2)^2(x+2)y'' + 2xy' + 3(x-2)y = 0$ . Να προσδιοριστούν για τα κανονικά ιδιάζοντα η δείκτρια εξίσωση, οι εκθέτες ιδιομορφίας και το διάστημα σύγκλισης της σε μορφή δυναμοσειράς λύσης. (μον. 0.5)

β) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & 1 \leq t < 2 \end{cases}, f(t+2) = f(t). \quad (\text{μον. 0.75})$$

γ) Να λνθεί η εξίσωση

$$F(t) = 4t^2 - \int_0^t F(t-b)e^{-b} db \quad (\text{μον. 0.75})$$

**ZHTHMA ΤΡΙΤΟ:**

α) Να βρεθεί η γενική λύση της δ. ε.  $(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$ . (μον. 1)

β) Να βρεθεί η γενική λύση της δ. ε.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x+3y}{2x+y}$ . (μον. 1)

γ) Ισχύει το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης για το ΠΑΤ  $y' = |y|^{1/2} + y^2, y(0) = 0$ ; Να δικαιολογηθεί η απάντησή σας. (μον. 0.5)

**ZHTHMA ΤΕΤΑΡΤΟ:**

Με τη μέθοδο των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων να βρεθεί η γενική λύση του γραμμικού συστήματος  $\mathbf{x}' = A \cdot \mathbf{x}$  όπου  $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ . Να προσδιοριστεί το είδος και η ευστάθεια του κρίσιμου σημείου  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . (μον. 2.5)

Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

$$L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}, L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}, L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}, L(u_a(t)f(t-a)) = e^{-sa}F(s),$$

$$\text{αν } F(s) = L(f(t)) \text{ και } u_a(t) = H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \geq a, \end{cases}, a \geq 0.$$

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες,

Καλή επιτυχία