

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ
5^ο εξ.ΣΕΜΦΕ, 2012 -2013

1^η Σειρά Ασκήσεων

1. Έστω $\chi.\pi.(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και οποιαδήποτε ενδεχόμενα $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{F}$ ισχύει :

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) \leqslant P(\bigcap_{i=1}^n A_i) + n - 1$$

2. Έστω π.τ. με δύο ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα «επιτυχία» ε και «αποτυχία» α. Το πείραμα επαναλαμβάνεται επ' άπειρον και έστω ότι για $n \in \mathbb{N}$, A_n είναι το ενδεχόμενο : Οι n πρώτες εκτελέσεις ακολουθούνται από ακριβώς $2n$ «επιτυχίες». Ποια η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν απείρως πολλά A_n ;

3. Έστω μέτρο πιθανότητας P ορισμένο στον (\mathbb{R}, \mathbb{B}) όπου \mathbb{B} είναι σ-άλγεβρα που περιλαμβάνει όλα τα διαστήματα του \mathbb{R} . Ορίζουμε $G(t) = P((-\infty, t])$, $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση G είναι αύξουσα, δεξιά συνεχής και έχει

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} G(t) = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) = 1$$

4. Το χαρακτηριστικό X ενός προϊόντος είναι τ.μ. X με κατανομή $N(\mu=32.7, \sigma^2=4)$. Ένα κομμάτι του προϊόντος αυτού θεωρείται «σωστό» όταν $X > 30$.

- (α) Ποιο το ποσοστό των «σωστών» στο σύνολο παραγωγής;
- (β) Σε 5 κομμάτια του προϊόντος επιλεγμένα στην τύχη ποια η πιθανότητα να βρίσκονται 3 τουλάχιστον «σωστά»;
- (γ) Παίρνουμε διαδοχικά και τυχαία κομμάτια από το σύνολο της παραγωγής. Ποια η πιθανότητα να χρειαστούν 5 λήψεις ώστε να συναντήσουμε το πρώτο «σωστό»;

5. Έστω τ.μ. X με $\sigma.x.$ $F(x) = \exp(-e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$.

- (α) Βρείτε την $\sigma.\pi.\pi.$ f της τ.μ. X .
- (β) Αν $Y = \exp(\frac{X}{2})$, να βρείτε την μέση τιμή $E(Y)$.

6. Έστω διακριτή τ.μ. X με τιμές στο $\{0, 1, \dots\}$. Δείξτε ότι η μέση τιμή

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k).$$

7. Η ταχύτητα X ενός μορίου αερίου μάζας m σε απόλυτη θερμοκρασία T είναι τ.μ. με σ.π.π. (Κατανομή Maxwell – Boltzmann)

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 e^{-\beta x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

όπου $\alpha > 0$ και $\beta = \frac{m}{2kT}$, $k > 0$ η σταθερά Boltzmann.

- (α) Να βρείτε την σταθερά α .
- (β) Να βρείτε την μέση τιμή της κινητικής ενέργειας $Y = \frac{1}{2}mX^2$.

8. Να βρείτε το αναμενόμενο (μέση τιμή) πλήθος ρίψων ενός ζαριού μέχρι να εμφανιστούν όλες οι όψεις του.

9. Έστω τ.μ. X με σ.κ. F και σ.π.π. f και πεπερασμένη διασπορά.

- (α) Αν $G(u) = E[(X - u)^2]$, $u \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι $\min_u G(u) = G(m) = E(X)$ ($\Delta\eta\lambda$. $\min_u G(u) = V(X)$)
- (β) Αν $H(u) = E(|X - u|)$, $u \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι $\min_u H(u) = H(d)$ όπου $d \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $F(d) = \frac{1}{2}$ ('Ενα τέτοιο d ονομάζεται διάμεσος της τ.μ. X .)

10. Έστω τ.μ. X με πεπερασμένη διασπορά και $\sigma = \sqrt{V(X)}$. Αν $m = E(X)$ και d είναι η διάμεσος της τ.μ. X δείξτε ότι $|m - d| \leq \sigma$.

Παράδοση 10-1-2013