

Μαθηματικά Οικονομικά
ΕΜΠ, ΣΕΜΦΕ, 28-1-2016.

Θέμα 1. Εστω η συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ και $P_0 \in \mathbb{R}^m$. Υποθέτουμε η ϕ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και ότι $\text{grad}\phi(P_0) \neq 0$.

Αν το άνω τμήμα $S_{\geq P_0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \phi(\mathbf{x}) \geq \phi(P_0)\}$ της ϕ στο P_0 είναι κυρτό, δείξτε ότι το $\text{grad}\phi(P_0)$ στηρίζει το $S_{\geq P_0}$ στο σημείο P_0 . ($\text{grad}\phi(P_0) \cdot \mathbf{x} \geq \text{grad}\phi(P_0) \cdot P_0$, για κάθε $\mathbf{x} \in S_{\geq P_0}$).

Θέμα 2. Σε οικονομία ανταλλαγής με m αγαθά και l καταναλωτές δώστε τον ορισμό της ισορροπίας κατά Walras που στηρίζεται από το διάνυσμα τιμών p .

Στη συνέχεια δείξτε ότι η κατανομή $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_l)$ είναι κατανομή ισορροπίας που στηρίζεται από το διάνυσμα p αν και μόνο αν για κάθε i η σχέση προτίμησης \succeq_i παίρνει μέγιστη τιμή στο $B_{\omega_i}(p)$ στο σημείο x_i .

Άσκηση 3. Ορίστε τη λεξικογραφική σχέση προτίμησης \succeq στον \mathbb{R}_+^4 . Εξετάστε αν $\eta \succeq$ είναι συνεχής και αν $\eta \succeq$ αναπαρίσταται από συνάρτηση χρησιμότητας.

Άσκηση 4. Εστω η σχέση προτίμησης \succeq που ορίζεται στον \mathbb{R}_+^m . Πότε λέμε ότι $\eta \succeq$ ορίζεται από συνάρτηση χρησιμότητας και πότε ότι $\eta \succeq$ στηρίζεται από το διάνυσμα p του \mathbb{R}^m ; Προσδιορίστε το διάνυσμα που στηρίζει τη σχέση προτίμησης που ορίζεται από τις συναρτήσεις χρησιμότητας $u(x, y)$ στο σημείο (x_0, y_0) , διατηρώντας την σχέση \succeq που ορίζεται στον \mathbb{R}_+^2 .

- (i) $u(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2}$, $(x_0, y_0) = (5, 4)$,
- (ii) $u(x, y) = \min\{x, y\}$, $(x_0, y_0) = (5, 5)$,

Άσκηση 5. Σε οικονομία ανταλλαγής με δύο αγαθά και δύο καταναλωτές δώστε τον ορισμό της κατανομής ισορροπίας κατά Walras που στηρίζεται από το διάνυσμα τιμών p . Στη συνέχεια εξετάστε αν σε οικονομία ανταλλαγής με δύο αγαθά και δύο καταναλωτές με αρχικά αγαθά $\omega_1 = (12, 4), \omega_2 = (12, 12)$ και συναρτήσεις χρησιμότητας $u_1(x, y) = xy, u_2(x, y) = x^2y$ η κατανομή

$$\mathbf{x} = ((8, 8), (16, 8))$$

είναι ισορροπία κατά Walras που στηρίζεται από το διάνυσμα $p = (1, 1)$.

Άσκηση 6. Σε οικονομία με δύο αγαθά και έναν καταναλωτή με συνάρτηση χρησιμότητας $u(x, y) = 4x + 7y$ και αρχικό αγαθό $\omega = (6, 6)$ προσδιορίστε την αντιστοιχία ζήτησης

$$\phi(p), p \in \mathbb{R}^2, p > 0$$

και εξετάστε αν έχει συνεχή επιλογή (Να δώσετε τον ορισμό της αντιστοιχίας ζήτησης και να πείτε πότε η αντιστοιχία ζήτησης έχει συνεχή επιλογή).

Άσκηση 7. Εστω άνταγωνιστικό παίγνιο δύο παικτών με σύνολο επιλογών $S_1 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ για το πρώτο παίκτη και $S_2 = \{\omega_1, \omega_2\}$ για τον δεύτερο και αποδόσεις $a_{11} = 2, a_{12} = 3, a_{21} = 3, a_{22} = 2$ για το πρώτο παίκτη.

(i) Προσδιορίστε τα σύνολα στρατηγικών των παικτών, τον πίνακα και τη συνάρτηση απόδοσης των παικτών.

(ii) Προσδιορίστε μια λύση του παίγνιου.

Καλή επιτυχία!