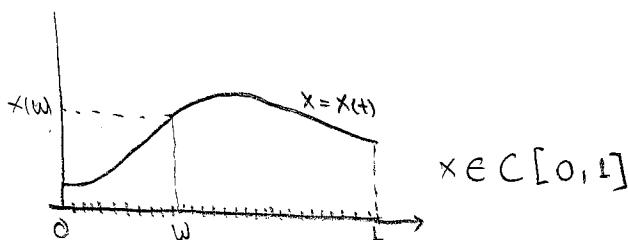


Επιπτώσεις Ταράντελας (J. Nash)Χωρίς αγαθά - χωρίς τιμήνΟικονομία με n αγαθά (n x supermarket) αγαθά: $1_0, 2_0, \dots, n_0$

Κάθε συναρθεία πρέπει να είναι σύνορα

 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, οπου x_i είναι βαθμός (ποσότητα) του i-αγαθού.Παράδειγμα: για $n=4$, $x = (3, 2, 0, 0)$ Το x δείχνει δέσμην (διανυόμενη) αγαθών.Ο \mathbb{R}^n δείχνει χωρίς αγαθά.Κάθε $P = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{R}_+^n$ είναι σύνορα σύνορα της, όπου την έννοια δει P_i είναι η τιμή της βαθμού του αγαθού.Άριστος παράδειγμα, $P = (1, 3, 2, 4)$ είναι σύνορα σύνορα της. Εάν αλλάζει σύνορα της τότε είναι $\omega P = (0, 2, 1, 3)$.Αν $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ σύνορα της, n αξία της δέσμης αγαθών είναι:
 $P \cdot x = \sum_{i=1}^n P_i x_i$ Στην συναρθεία συνδέεται τιμές να είναι γραφίμενες.
Αν $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ γραφίμενη, υπόριθμη $P \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = P \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ Αναδείξη: $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $f(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) =$
 $= (x_1, \dots, x_n) \cdot (f(e_1), \dots, f(e_n)) = P \cdot x$ Χωρίς τιμήν: Το σύνορο των γραφίμενων, ανεξάρτητης αναμονής $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, του είναι ο \mathbb{R}^n

Σε αναποδοτικές συναρθείς, τα αγαθά παραπέμπονται στην αναποδοτική τιμή τους

Παράδειγμα: $\Omega = [0, 1]$ το σύνορο των υποσύνορων που βρίσκεται να απλεύει στην ενδιάμεση της συναρθείαςΈτσι συναρθεία αγαθό της συναρθείας, τα n αγαθά σε ενημέρωση (εξαρτήσεις) από την υποσύνορη της βρίσκεται στην συναρθεία της, η οποία είναι $x(t)$ 

Ενδιένων υπάρχουν οιανθήμα ποντίδα, οπως ο κύριος αγαθός είναι αναρριζώστας κύριος X.

κύριος αγαθός
X

κύριος τετρινός: X^* ο δινός του X

To ουντό του αντεκεντούν και γραφικά αναμοιησεν $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

H οιανθήμα παριστάνεται ως $\langle X, X^* \rangle$.

Διατεραγμένοι κύριοι

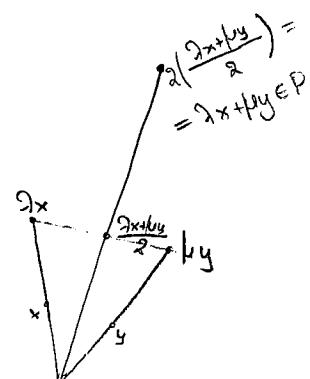
Έστω E γραφικός κύριος. P ⊆ E είναι μένος, αν P ≠ ∅, P είναι υπόδι και $\exists x \in P \wedge \forall x \in P \wedge \forall t \in \mathbb{R}_+$. ($\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$), ο P είναι μένος (ωE) και ενιδιένοι λοχίες $P \cap (-P) = \{\emptyset\}$, τοτε ο P είναι ο ίδιος μένος.

Av P μένος, Επομένως: $\forall x, y \in P, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \alpha x + \beta y \in P$
 $\forall x, \beta y \in P$

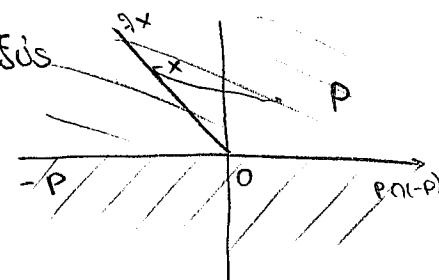
$$\frac{1}{2}(\alpha x) + \frac{1}{2}(\beta y) = \frac{\alpha x + \beta y}{2} \in P \Rightarrow 2 \left(\frac{\alpha x + \beta y}{2} \right) = \alpha x + \beta y \in P$$

$$0 = 0x \quad \forall x \in P \Rightarrow 0 \in P$$

$$-P = \{-x \mid x \in P\}, 0 \in -P$$



Παραδείγματα: $E = \mathbb{R}^2$, $P = \{(x, y) \mid y \geq 0\}$ μένος του \mathbb{R}^2 , δικτυού οιδιότητας:



Έστω E γραφικός κύριος. Av > είναι βια σχέσην περιουσίας διατεραγμένης πλω αριθμητικών στον E, περιττώς ιδιότητες:

1. $x \geq x \quad \forall x \in E$ (αναγορευτική)
2. $x \geq y, y \geq x \Rightarrow x = y$ (αυτοβεργία)
3. $x \geq y, y \geq z \Rightarrow x \geq z$ (μεταβασική)
4. $x \geq y \Rightarrow \begin{cases} x+z \geq y+z & \forall z \in E \\ \alpha x \geq \alpha y & \forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$

Τοτε ο E είναι ένας μερικώς διατεραγμένος γραφικός κύριος και n > είναι βια σχέσην περιουσίας διατεραγμένης στο E.

To ουντό $E_+ = \{x \in E \mid x > 0\}$ είναι ο δεύτερος μένος του E (ως προς την >)
Ο E_+ είναι οιδιότητας.

Παραδειγμα: (1) $E = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \geq y = (y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_i \geq y_i \forall i$

Tote $n \geq 2$ και σχετική προστιθέμενη διατάξη.

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0 \Leftrightarrow x_i \geq 0 \forall i\}$$

$$-\mathbb{R}^n = \{-x \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R}_+^n\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \leq 0 \forall i\}$$

$$\mathbb{R}_+^n \cap (-\mathbb{R}_+^n) = \{0\}, 0 \in \mathbb{R}_+^n \text{ ελεύθερος}$$

(2) $E = C[0,1]$.

Av $x+y \in E$, $x \geq y \stackrel{\text{def}}{\iff} x(t) \geq y(t) \quad \forall t \in [0,1]$

Ο E είναι διατάξιμος καθώς οι αριθμοί $n \geq n$ μπορούν διατάξη στο $C[0,1]$

$$E_+ = \{x \in C[0,1] \mid x \geq 0\}$$

$E \ni$ πρώτη διατάξη.

$$1. x \geq x \quad \forall x$$

$$2. x \geq y, y \geq x \Rightarrow x = y$$

$$3. x \geq y \geq z \Rightarrow x \geq z$$

$$4. x \geq y \Rightarrow \begin{cases} x+z \geq y+z \quad \forall z \\ \exists \alpha > 0 \text{ s.t. } \alpha y \leq x \end{cases}$$

Η "≥" είναι ορέσθηκε στην πρώτη διατάξη των στοιχείων της Ε πρώτη γραμμής κύρου.

Tο Σ $E_+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ ο δυνατός μένος των x της E_+ είναι ο ίδιος μένος της E .

- $E_x = \{-x \mid x \in E_+\}$ ο αρνητικός μένος της E .

Ισχύουν: i) $x \geq y \Leftrightarrow x-y \geq 0 \Leftrightarrow x-y \in E_+$

$$\text{ii)} x \geq y \Rightarrow \exists \alpha \leq 0 \text{ s.t. } y = x + \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \leq 0$$

Αποδείξη: i) $x \geq y \xrightarrow{(4)} x + (-y) \geq y + (-y) \Leftrightarrow x - y \geq 0 \Leftrightarrow x - y \in E_+$

$$\text{ii)} x \geq y, -\alpha \geq 0 \xrightarrow{(4)} (-\alpha)x \geq (-\alpha)y \Rightarrow -\alpha x \geq -\alpha y \xrightarrow{(1)} -\alpha x = -\alpha y$$

Οριζόντιες γραμμές διατάξης από οποιούδεμιν μένος της E

Έστω $P \subseteq E$ οίδιος μένος της E , δηλαδή $\forall x, y \in P \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_+$

$$\text{και } P \cap (-P) = \{0\}$$

Οριζόντιες γραμμές διατάξης \Rightarrow έστω $E : x \geq y \Leftrightarrow xy \in P$, το Σ $n \geq 1$ μετανομένης διατάξεων (1)-(4)

δηλαδή είναι ορέσθηκε στην πρώτη γραμμής διατάξης της E .

Προχωραμένο, 1) $\forall x \in E \Rightarrow x - x = 0 \in P \Rightarrow x \geq x$

2) Έστω $x \geq y$ και $y \geq x$. Τότε $y - x \in P$ και $y - x = -(x - y) \in P \Rightarrow$
 $\Rightarrow x - y \in (-P) \Rightarrow x - y \in P \cap (-P) = \{0\} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$

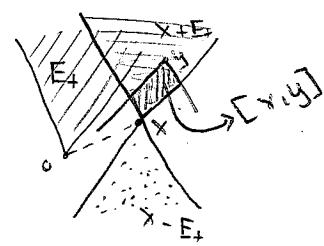
3) $x \geq y \Rightarrow x - y \in P$ $\xrightarrow{(1)} x - z \in P \Rightarrow x \geq z$
 $y \geq z \Rightarrow y - z \in P$

Έστω E πρώτη διατάξης γραμμής κύρου. Τότε $\forall x \in E$:

$$\{x\} + E_+ = \{y \in E \mid y \geq x\}$$

$$\{x\} + (-E_+) = \{y \in E \mid y \leq x\}$$

Απόδ: $y \in \{x\} + E_+ \Rightarrow y = x + z, z \in E_+ \Rightarrow y - x = z \in E_+ \Rightarrow y - x \geq 0 \Rightarrow y \geq x$



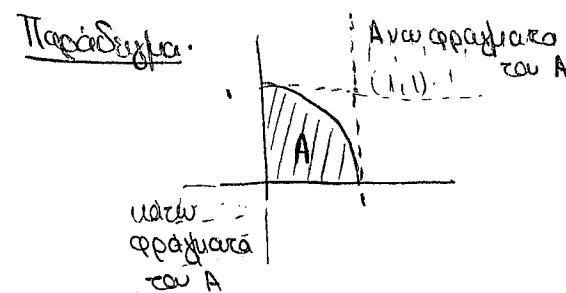
Έσω $x, y \in E$, $x \leq y$. Το αντίτο $[x, y] := \{z \in E \mid x \leq z \leq y\}$ είναι το διατάξιμη διάστημα x, y .

Παραδειγματα: $E = \mathbb{R}^2$. $(x_1, x_2) \geq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 > y_1$ και $x_2 > y_2$. Τοτε $\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$

Έσω $A \subseteq E$. Αν υπάρχει $x \in E$: $x \geq a$, $\forall a \in A$, τότε x είναι τούτο (διατάξιμο) διών φρέσκια του A .

Αν υπάρχει $x \in E$: $x \leq a$ $\forall a \in A$, τότε το x είναι τούτο (διατάξιμο) κάτω φρέσκια του A .

Αν x είναι διών φρέσκια του A και y είναι κάτω φρέσκια του A , τότε $A \subseteq [y, x]$



$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = (1, 1) \text{ διών φρέσκια του } A$$

$$y = (0, 0) \text{ κάτω φρέσκια του } A$$

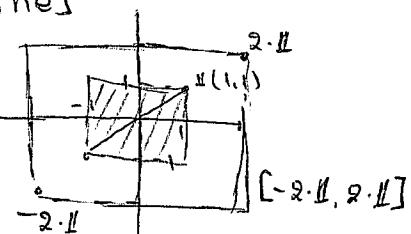
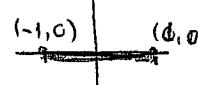
Αν $x \geq a$ $\forall a \in A$ και για όλες $w \in E$ ισχει: $w \geq a \Rightarrow w \geq x$, τότε το x αποτελεί supremum του A και αριθμογειακό $\sup(A) = x$. Αν υπάρχουν $y \in E$: $y \leq a$ $\forall a \in A$ και για όλες $w \in E$ ισχει: $w \leq a \Rightarrow w \leq y$, τότε το y αποτελεί infimum του A και γραφεί $y = \inf(A)$

To $e \in E_+$ είναι διατάξιμη παρίδια του E , αν $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-ne, ne]$

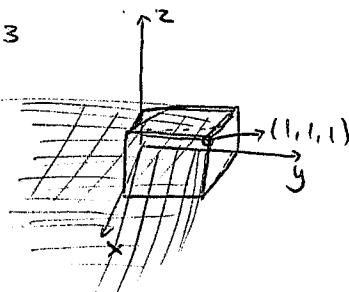
Παραδειγματα: οτου \mathbb{R}^2 το $\mathbb{I} = (1, 1)$ είναι διατάξιμη παρίδια

Επίσης το $(1, \frac{1}{2})$ είναι διατάξιμη παρίδια οτου \mathbb{R}^2

To $(1, 0)$ δεν είναι διατάξιμη παρίδια του \mathbb{R}^2



Στον \mathbb{R}^3

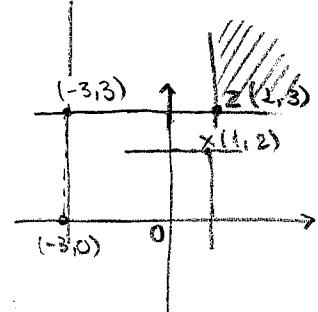


Έστω (E, \geq) με διάχειρα. Αν για όλες $x, y \in E$ υπάρχουν $\sup\{x, y\}$ και $\inf\{x, y\}$ τότε ο E ανθεκτικός γραφικός δίκτυο στη γραφικής ανθεκτικός (linear lattice).

Τότε απλοποίαρε $x \vee y = \sup\{x, y\}$ και $x \wedge y = \inf\{x, y\}$

Παραδείγματα: i) \mathbb{R}^2 με την στάνταρ διάταξη είναι γραφικός ανθεκτικός.

$$\begin{cases} x = (1, 2) \\ y = (-3, 0) \end{cases} \quad \sup\{x, y\} = x \vee y = z = (1, 2)$$

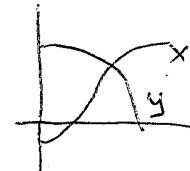


$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) &= (\max\{x_1, x_2\}, \max\{y_1, y_2\}) \\ (x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) &= (\min\{x_1, x_2\}, \min\{y_1, y_2\}) \end{aligned}$$

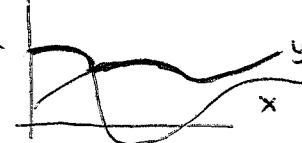
Αναλόγως, ο \mathbb{R}^n με την στάνταρ διάταξη $x = (x_1) \geq y = (y_1) \Leftrightarrow x_i \geq y_i \quad \forall i = 1, \dots, n$ είναι γραφικός ανθεκτικός.

($E = C[0, 1], \geq$) είναι γραφ. ανθεκτικός
↳ στανταρ διάταξη

$x, y \in C[0, 1]$ Επομένως: $x \geq y \Leftrightarrow x(t) \geq y(t) \quad \forall t \in [0, 1]$



Πραγματικά, αν $x, y \in C[0, 1]$, τότε



δεν ισχύει $z(t) = \max\{x(t), y(t)\}$

$\forall t \in [0, 1]$, τότε $z \in C[0, 1]$ και $z = x \vee y$. Ενώστε αν $w(t) = \min\{x(t), y(t)\}$, $t \in [0, 1]$

τότε $w = x \wedge y$

Αν E γραφικός ανθεκτικός για όλες $x \in E$, επομένως: $x^+ = x \vee 0$: το δευτέρο πέρασ του x και $x^- = x \wedge 0$: το αρνητικό πέρασ του x , και $|x| = x \vee (-x)$ η ανθεκτική του x

Ισχυει: $x = x^+ - x^-$ και $|x| = x^+ + x^-$

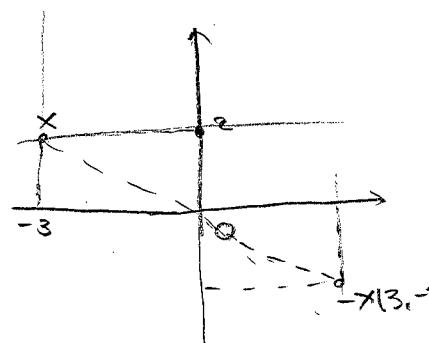
Παραδείγματα: i) $E = \mathbb{R}^2$, στανταρ. διάταξη

$$x = (-3, 2)$$

$$x^+ = x \vee 0 = (0, 2)$$

$$x^- = (-x) \vee 0 = (3, -2) \vee 0 = (3, 0)$$

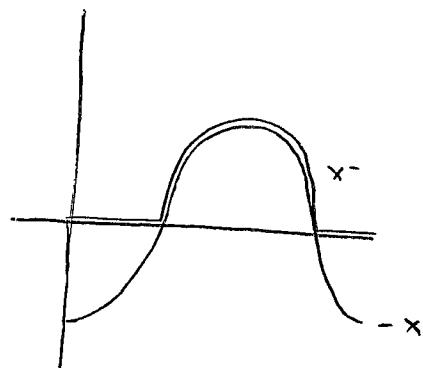
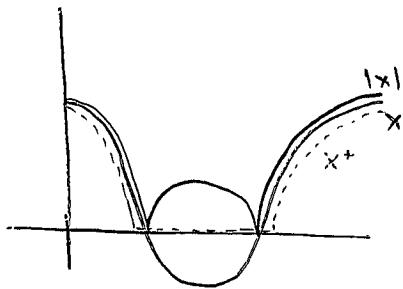
$$|x| = x \vee (-x) = (3, 2)$$



ii) $(\mathbb{R}^n, στάνταρ διάταξη)$

$$x^+ = (\max\{x_i, 0\}), x^- = (\max\{-x_i, 0\}), |x| = (\max\{|x_i|, -x_i|\})$$

iii) $E = C[0,1]$



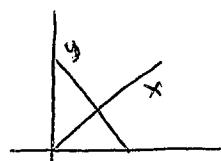
Πρόσωπο: Αν (E, \geq) πρ. διακριτ. πίνακας για $A, B \subseteq E$. Έχει:

- i) $\sup(A) = -\inf(-A)$
- ii) $\sup(A \cup B) = \sup(A) \vee \sup(B)$
- iii) $\inf(A \cup B) = \inf(A) \wedge \inf(B)$
- iv) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$
- v) $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$

Εφόσον τα $\sup(A)$, $\sup(B)$, $\inf(A)$, $\inf(B)$ που φέρουν σημεία συνάρτησης.

Άσκηση: Εσώρου Ε το σύνολο των γραμμικών συναρτήσεων που αριθμούνται στο $[0,1]$, δηλαδή $E = \{x(t) = at + b \mid a, b \in \mathbb{R}, t \in [0,1]\}$

(E, \geq) οπως $x, y \in E$, $x \geq y \Leftrightarrow x(t) \geq y(t) \quad \forall t \in [0,1]$. Εξετάζεται αν ο (E, \geq) είναι γραμμικός. Αν ναι, προσδιορίζεται $x \vee y$, οπως $x(t) = t$, $y(t) = -t + 1$, $t \in [0,1]$



$A \subseteq E$ ήφανται διατεταγμένων γραμμών χωρών, $A \subseteq E, [\sup A = x]$

$\Leftrightarrow [x \geq a \vee a \in A \text{ και } y \in E, \text{ τούτων } n \text{ συνεχήγουν } y \geq a \text{ ή } a \in A \Rightarrow y \geq x]$

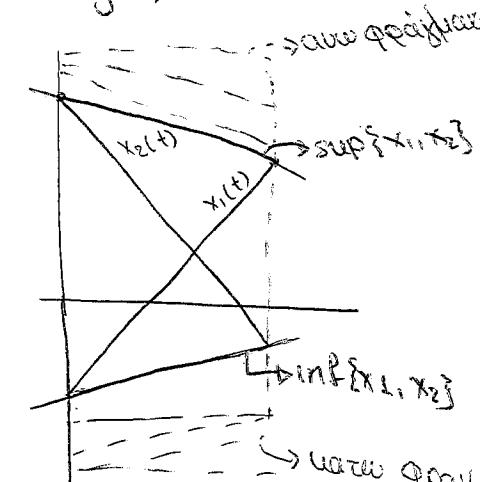
E γραμμ. ανδείξεις, αν $\forall xy \in E$, υπάρχειν $\sup\{x, y\}, \inf\{x, y\}$

Άσκηση: Αν $X = \{x(t) = at + b \mid a, b \in \mathbb{R}, t \in [0, 1]\}$, τότε (X, \geq) γραμμ. ανδείξεις

$(x_1, y \in X, x_1 \geq y \Leftrightarrow x(t) \geq y(t) \forall t \in [0, 1])$. Τότε $x_1(t) = a_1t + b_1, x_2(t) = a_2t + b_2 \in X$

Οτιδήποτε $\sup\{x_1, x_2\} \leq \sup\{x_1, x_2\}$

$\sup\{x_1, x_2\} = x \Rightarrow x \in X, x \geq x_1, x_2$ και $\forall y \in X : y \geq x_1, x_2 \Rightarrow y \geq x$



Άσκηση: Νόσο το ουσιώδει των πολυωνυμίων μέχρι και των
βασικών περιορισμών στο $[0, 1]$, βε την ανθεκτική διατάξη

των επιπλ. ανδείξεων $X = \{at^2 + bt + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}, t \in [0, 1]\}$

Άσκηση: Θέσο υπάρχει $x_1, x_2 \in X$: διεύ. υπάρχει $\sup\{x_1, x_2\}$

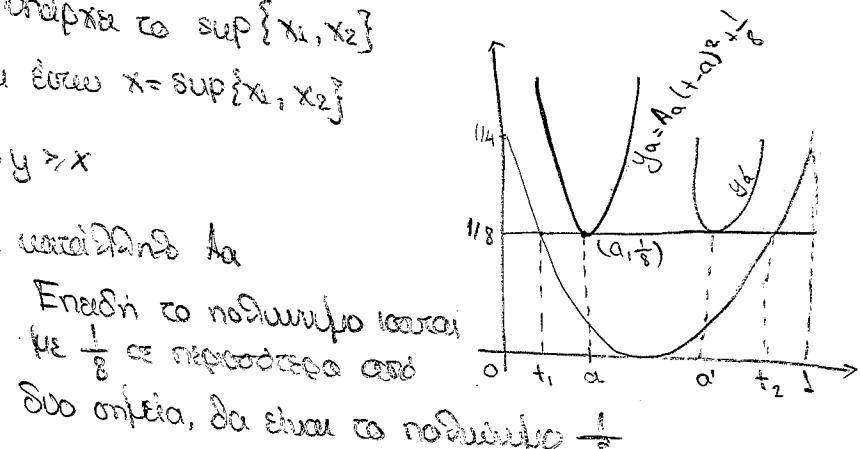
Τότε $x_1(t) = \frac{1}{8}(t-a)^2, x_2(t) = (t-\frac{1}{2})^2$ και έτσι $x = \sup\{x_1, x_2\}$

Τότε $x \geq x_1, x_2$ και $\forall y \in X, y \geq x_1, x_2 \Rightarrow y \geq x$

$y_a = A_a(t-a)^2 + \frac{1}{8} \geq x_1(t), x_2(t)$ για κατεύθυνση A_a

τότε $y_a \geq x \geq x_1, x_2$ Άρα $x(a) = \frac{1}{8}$ Εναδική της πολυωνυμού λέγεται

Άρα $x = x(a) = \frac{1}{8}$ Ητοτο



$A, B \subseteq E$ μόγις, $\sup(A \cup B) = \sup(A) \vee \sup(B)$, επειδή $\sup(A), \sup(B), \sup(A) \vee \sup(B)$ υπάρχουν.

Άσκηση: Έτσι $\sup(A) = x_1, \sup(B) = x_2$ και $x_1 \vee x_2 = x$. Θέσο $x = \sup(A \cup B)$

$x \geq x_1, x_2$, $x_1 > a \text{ ή } a \in A, x_2 > b \text{ ή } b \in B \Rightarrow x$ ανω φράγμα των $A \cup B$

Οτιδήποτε $y \in E$ τότε $y \geq x_1, x_2$. Έτσι $y \in E, y$ ανω φράγμα των $A \cup B$

Θέσο $y \geq x$. $\forall a \in A$ είναι $y \geq a \Rightarrow y \geq x_1$. Άντοτε $\forall b \in B : y \geq b \Rightarrow y \geq x_2$ και έτσι $x = \sup\{x_1, x_2\}$, δια είναι $y \geq x$. Άρα $x = \sup(A \cup B)$

Τάσσον: Αν E γραμμ. σύνθετος, τότε είχουμε:

- i) $\sup\{x, -x, 0\} = \sup\{x, -y\} \quad \forall x \in E$
- ii) $-(x \wedge y) = (-x) \vee (-y) \quad \forall x, y \in E$
- iii) $(x \vee y) + z = (x+z) \vee (y+z) \quad \forall x, y, z \in E$
- iv) $x \wedge y = x \vee y \wedge x \wedge y, \quad \forall x, y \in E$
- v) $x \wedge (y+z) \leq x \wedge y + x \wedge z \quad \forall x, y, z \in E.$

Άσκεση:

- i) $\{x, -x, 0\} \supseteq \{-x, x\} \Rightarrow w = \sup\{x, -x, 0\} \geq z = \sup\{-x, x\}. \quad \Theta \delta o \quad z \geq w$
- ii) $\inf(-A) \quad \sup(-A) \quad \inf(A) \quad \sup(A)$ $\quad \text{Έχω ότι } -\inf(A) = \sup(-A) \Rightarrow \text{(ii)}$
- iii) $x \vee y + z = \sup\{x, y\} + z = \sup\{x, y\} + \sup\{z\} \stackrel{\sup(A+B) =}{=} \sup\{x+z, y+z\} = (x+z) \vee (y+z)$
- iv) $x \vee y + x \wedge y = \sup\{x, y\} + \inf\{x, y\} = \sup\{x, y\} - \sup\{-x, -y\} \stackrel{x+y}{=} x+y \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sup\{x, y\} \stackrel{\sup\{x, y\} + \sup\{-x, -y\}}{\leq} x+y + \sup\{-x, -y\} \rightarrow \text{Ισχύει πάλι } x+y + \sup\{-x, -y\} = \sup\{x, y\} + \sup\{-x, -y\}$
- v) $\text{Αν } x^+ = x \vee 0, x^- = (-x) \vee 0 \text{ και } |x| = x \vee (-x), \text{ τότε ισχύουν:}$
 - $x = x^+ - x^-$
 - $|x| = x^+ + x^-$
 - $x^+ \wedge x^- = 0$

Άσκεση: $x = x^+ - x^- \Leftrightarrow x + x^- = x^+ \Leftrightarrow x + \sup\{-x, 0\} = x^+ = \sup\{x, 0\}$

Όμως $x + \sup\{-x, 0\} = \sup\{x\} + \sup\{-x, 0\} = \sup\{\cdot\} + \sup\{\cdot\} = \sup\{0, x\}$

Έτσι $(E = C[0,1], \geq)$. Τότε E είναι γραμμ. σύνθετος. Όμως δεν
έχουμε ούτε ανώ όργανη. υποδομή του E εξει supremeum.

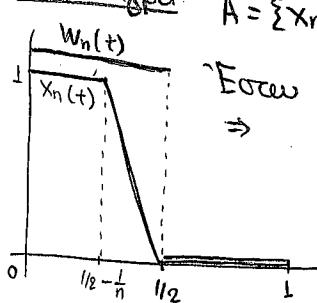
Παραδείγμα:

$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ Θδο δεν υπάρχει το $\sup(A)$

Έτσι $x = \sup(A)$. Τότε $x(t) > x_n(t) \quad \forall t$. Άρα $\forall t \in [0, \frac{1}{2}] \Rightarrow$
 $t < \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \Rightarrow x_n(t) = 1 < x(t)$

Έτσι $w_n > x_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$. $w_n > x \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in (\frac{1}{2}, 1) \Rightarrow x(t) = 0$

$x(t) = \begin{cases} 1 & \forall t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \forall t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ Έτσι ημεριά στην οποία η μεταβολή x ανεξάρτητη



Παρατίθοντας: Αν E γραμμ. σύνθετος, για κάθε $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ υπάρχει $\sup\{x_1, \dots, x_n\}$, $\inf\{x_1, \dots, x_n\}$

Διανοίξηση: Για $n=2$, ισχύει απ' την οριζόντια του γρ. σύνθετου. Θδο ισχύει για $n=3$
 $\{x_1, x_2, x_3\} = \{x_1, x_2\} \cup \{x_3\} \Rightarrow \sup\{x_1, x_2, x_3\} =$
 $= \sup\{x_1, x_2\} \vee \sup\{x_3\} = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$

Άσκεση: ισχύει για $n=4$ ώστε επαγγελματικά για κάθε n .

Έχω ότι $z \geq x$ ή $z \geq -x$. Αδραίζω ωριδικό: $2z \geq 0 \Rightarrow z \geq 0$. Άρα $z \geq w$

iii) $\inf(-A) = \sup(-A) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} A = \{x, y\} \Rightarrow -\inf\{x, y\} &= -(x \wedge y) = \sup\{-x, -y\} = (\neg x) \vee (\neg y) \\ \Leftrightarrow \sup\{x, y\} &\stackrel{\sup(A+B) =}{=} \sup(x+z, y+z) = (x+z) \vee (y+z) \\ &\stackrel{\sup\{x, y\} - \sup\{-x, -y\} = x+y}{=} x+y \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$= \sup(\{\cdot\} + \{\cdot\}) = \sup\{y, x\}$$

Αν $x^+ = x \vee 0, x^- = (-x) \vee 0$ και $|x| = x \vee (-x)$, τότε ισχύουν:

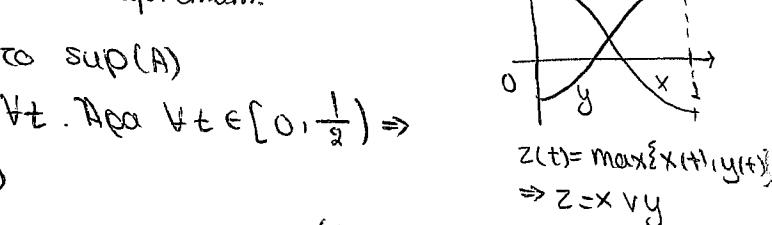
- $x = x^+ - x^-$
- $|x| = x^+ + x^-$
- $x^+ \wedge x^- = 0$

Άσκεση: $x = x^+ - x^- \Leftrightarrow x + x^- = x^+ \Leftrightarrow x + \sup\{-x, 0\} = x^+ = \sup\{x, 0\}$

Όμως $x + \sup\{-x, 0\} = \sup\{x\} + \sup\{-x, 0\} = \sup\{\cdot\} + \sup\{\cdot\} = \sup\{0, x\}$

Έτσι $(E = C[0,1], \geq)$. Τότε E είναι γραμμ. σύνθετος. Όμως δεν

έχουμε ούτε ανώ όργανη. υποδομή του E εξει supremeum.



ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΡΟΤΙΝΗΣΗΣ

Έσσω X σύνολο. Μια διάβεσης σχέσης στο X είναι ένα υποσύνολο R του $X \times X$, αν $R \subseteq X \times X$. Δημιουργήστε xRy ή λογικά $x \geq y \iff (x,y) \in R$

Στα συναφικά γραφής $x \geq y$ να θέλετε "το x προστίθεται στο y " ή "το y είναι χαρακτηριστικό το x ".

Άρ: i) $x \geq x \quad \forall x \in X, \text{ και } x \geq x \text{ αντιδοτούν}$

ii) $\forall x, y \in X \quad \text{τότε } x \geq y \text{ ή } y \leq x, \text{ και σχέση } x \geq y \text{ είναι ομοιούντων}$

iii) $x \geq y, y \geq z \Rightarrow x \geq z, \text{ και σχέση } x \geq z \text{ είναι περατωτούν}$

Μια σχέση προτίθεται να μετατοπίσει τα i, ii, iii θέματα τοξών.

Έσσω \geq σχέση προτίθεται στο X . Άν υπάρχει $u: X \rightarrow R$ ώστε $x \geq y \iff u(x) \geq u(y)$,

τότε \geq είναι προτίθεται από την u , ή λογικά στην u είναι συνάρτηση προτίθεταις (τα κανονικά)

Κάθε συνάρτηση $u: X \rightarrow R$ οπήρα μια σχέση προτίθεταις \geq ως εξής:

$x \geq y \iff u(x) \geq u(y)$, και σχέση αντιδοτούν, ομοιούντων περατωτούν

Οι δύο παραπάνω δια το αντιστόχο δεν τοξεύουν πάντας

Έσσω \geq σχέση προτίθεται στο X . Νέρετε το x είναι γνήσια προστίθετο του y ή να γράψετε $x \succ y$ ή $x \geq y$ ή $y \not\geq x$. Νέρετε το x είναι λογικός (αδιάρροφος) του y ή να γράψετε $x \sim y$ ή $x \geq y$ ή $y \geq x$

Άν $x \in X$: $P_r(x) = \{y \in X : y \geq x\}$ το οποίο την προτίθεται στην ίδια το x

$$P_r(x) = \{y \in X : y \geq x\}$$

$$P_s(x) = \{y \in X : y \leq x\}$$

$$P_x(x) = \{y \in X : y < x\}$$

$$P_n(x) = \{y \in X : y \sim x\}$$

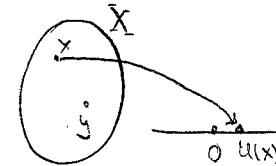
Άν $n \geq$ είναι ομοιούντων σχέσης στα συνόλα $P_r(x), P_s(x), P_x(x)$ είναι θέμα να έρωνται τας είναι το X .

Ανθεκτικότητα: Θέσα $P_r(x) \cup P_s(x) \cup P_x(x) = X$. Έσσω $y \in X$, τότε $y \geq x$ ή $x \geq y$

I) $y \geq x$ ή $x \geq y \Rightarrow x \sim y \Rightarrow y \in P_s(x)$

II) $y \geq x$ ή $x \geq y$ δεν τοξεύουν ταυτόχρονα. Τότε:

a) $y \geq x$ ή $x \not\geq y \Rightarrow y \geq x \Rightarrow y \in P_r(x)$



b) $y \geq x$ ή $x \geq y \Rightarrow x > y \Rightarrow y \in P_<(x)$

Επίσης τα παραδίνωμα αντιστοίχως στην Σέβα και δύο

$y \in P_r(x) \cap P_n(x) \Rightarrow y \geq x$ ή $x \geq y \Rightarrow y \geq x$, $y \geq x$ ή $x \geq y$. ΑΤΟΠΟ!

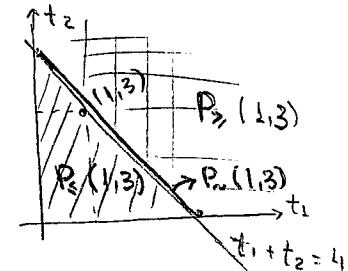
Επίσης αν $n \geq 0$ λιγότερο, τότε: $P_{\geq}(x) = P_r(x) \cup P_n(x)$ ή $P_{\leq}(x) = P_s(x) \cup P_n(x)$

Παραδείγμα: Έστω $X = \mathbb{R}_+^2$

i) $x = (x_1, x_2) \succ (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$ (αναπλοκής αριθμών)

Η σχέσην προσφέρουν > αναπλοκές από τη $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ ή n ή στην αντίστοιχη γραφικής την προσφύστε τα κανόνια

Αν $x = (1, 3)$, τότε $P_{\succ}(x) = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid y_1 + y_2 \geq 4\}$



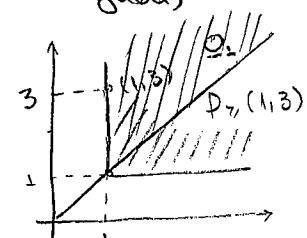
ii) $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2) \Leftrightarrow \min\{x_1, x_2\} \geq \min\{y_1, y_2\}$, τότε η >

αναπλοκές από τη $u: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}: u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ (αυτήν πρωτότονα αριθμών)

Αν $x = (1, 3)$, έστω $(x, y) \succ (1, 3) \Leftrightarrow \min\{x, y\} \geq 1$

αν $x \succ y \Rightarrow y \geq 1 \Rightarrow (x, y) \in P_{\succ}(x) = \{(x, y) \mid x \succ y \geq 1\}$

$y \succ x \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow \dots$

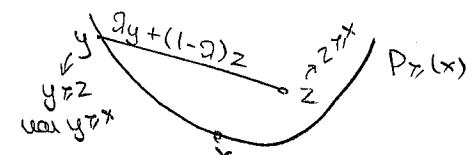
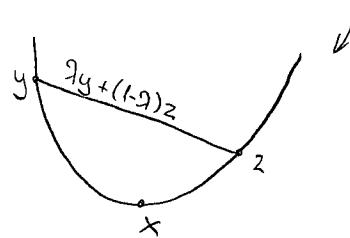


Έστω > σχέσην πρωτ. Ήπειρησαν αν $X \subseteq E$, οταν E γραφ. κώνων

Η σχέση \succ έχει μπτή αν $\forall x \in X$ έχει μπτή υποσύνοδο την X . Ισοδύναμη, ή

\geq έχει μπτή αν $\forall x \in X$ έχει: $y \succ x, z \succ x \Rightarrow y + (1-\lambda)z \succ x \quad \forall \lambda \in [0, 1]$

Η \geq έχει αναρριχή μπτή, αν για νότια $x \in X$ ισχει:

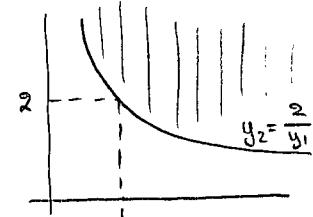


Γενικά ήταν μπτής συνδια-
στικός, πρωτοπόρων προ-
στοπέρα αριθμών!

Παραδείγμα: $X = \mathbb{R}_+^2$, $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 x_2 \geq y_1 y_2 \Leftrightarrow u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ ή αντίστοιχα, $x = (1, 2)$

$y = (y_1, y_2) \succ x \Leftrightarrow y_1 y_2 \geq 2 \Leftrightarrow y_2 \geq \frac{2}{y_1}$

Η \geq έχει αναρριχή μπτή



Επίδειξη Αν $\exists u: X \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\forall x, y \in X$ $x \geq y \Rightarrow u(x) \geq u(y)$ αφού οι u είναι αναπτυσσόμενοι στην U και $u \in U$ ισχει εναρμόνως χρησιμότητας (τις παναπλήσιες) $\Rightarrow x$ δέχεται εγκένια

Συγκεκρινές επειγόντων προτίμησης

Είναι X ομικρός χώρος και \geq η η σύγκεκρη προτίμηση που ισχύει στο X . Μπορεί ν.χ. να μονοθετική στο $X = \mathbb{R}_+$ ή ποδιαγράφη στην προτίμηση της μεγιτάς στην U την \mathbb{R}^n

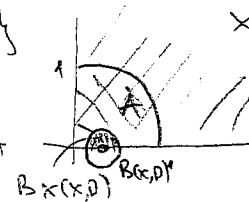
$$\text{Αναλ. } B_X(x, p) = \{y \in X \mid d_X(x, y) < p\} = B(x, p) \cap X.$$

$$\text{Λαπαδ. } \text{Αναλ. } E = \mathbb{R}^2, X = \mathbb{R}_+^2, d(x, y) = \|x - y\|$$

$$\text{τ.τ. } X \text{ Η.Χ. } \text{ ή } A = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$$

Αναλ. ανοικτός υποσύνοδος στο X ;

ΝΑΙ καθώς $B_X(x, p) \subseteq A$ γιατί $\forall y \in B_X(x, p)$



Θεώρημα Αν. E Η.Χ., $X \subseteq E$

και $A \subseteq X$ $\forall x \in X$

i) A -ανοικτός υποσύνοδος στο E $\Leftrightarrow \exists B$ ανοικτός υποσύνοδος στο E ώστε $A = B \cap X$

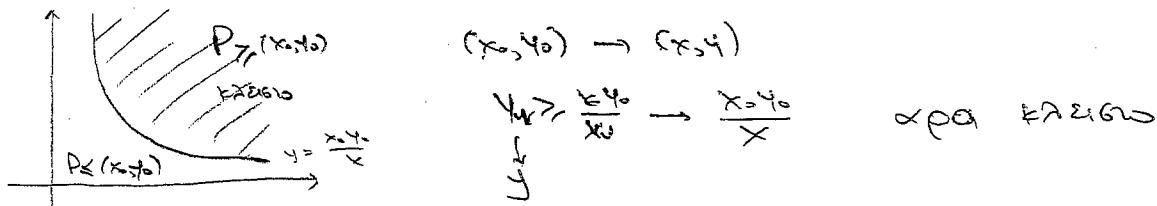
ii) A -κλειστός υποσύνοδος στο X $\Leftrightarrow \exists B$ κλειστός υποσύνοδος στο E ώστε $A = B \cap X$

Είναι X Η.Χ. και \geq σύγκεκρη προτίμηση που ισχύει στο X (π.χ. $X = \mathbb{R}_+^2$). $H \geq$ αναλ. "συνάντετος", στο $\forall x \in X \Rightarrow P_{\geq}(x)$ ανοικτός υποσύνοδος στο X . $H \geq$ αναλ. "κλειστός υποσύνοδος", στο $\forall x \in X \Rightarrow P_{\leq}(x)$ ανοικτός υποσύνοδος στο X . $H \geq$ αναλ. "συντεταγμένος", στο X αν αναλ. συνάντετος και κλειστός υποσύνοδος στο X .

Παραδείγμα Είναι $X = \mathbb{R}_+^2$ και \geq οι ίδιες αποτίμησης που εναρμόνωσαν $u(x, y) = xy$ τ.τ. \geq αναλ. συντεταγμένος.

Οριζόντια γραμμή $y = y_0$ στο υπόβαθρο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$ $\forall x \in \mathbb{R}_+$

$$P_{\geq}(x_0, y_0) = \{(x, y) \mid xy \geq (x_0 y_0)\} \Leftrightarrow y \geq \frac{x_0 y_0}{x} \text{ ή } x \geq \frac{x_0}{y} \text{ για } y > 0.$$



$$\text{αρ. } x_0, y_0 = 0 \Rightarrow P_{\geq}(x_0, y_0) = \mathbb{R}_+^2$$

Είναι E Η.Χ. $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ και $X \subseteq E$. H f αναλ. συντεταγμένος στο X $\Leftrightarrow f(x_0) \geq f(x) \forall x \in X$

Είναι $\{a_n\}$ αριθμητική σειρά ορισμένη $a_n = \{a_1, \dots\}$. Αναλ. $a_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \dots\}$, $s_n = \sup a_n$, $s_n = \inf a_n$.

Afifori $\lim (\sup a_n) = a \Leftrightarrow a = \lim s_n \Leftrightarrow a = \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sup \{ a_4, a_{4+1}, \dots \} \}$

$$\text{After all } \lim(\inf \{a_n\}) = B \Leftrightarrow B = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \Leftrightarrow B = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\inf \{a_n, a_{n+1}, \dots\}\}$$

Exoufir $\limsup(a_n) = a \Leftrightarrow a$ nuq1 10 ff jañurpo aqo zaq opia zw
aqo jkñinawen uñakawawen ws $\{a_n\}$

$\liminf(a_n) = b \Leftrightarrow b$ éval à microfond an la op. de l'ess
Généralisation à N termes dans $\{a_n\}$

nagad. $a_n = \begin{cases} 1/n & : n = 3k \\ 1 & : n = 3k+1 \\ 10 \frac{1}{n} & : n = 3k+2 \end{cases}$ f(x) 3 oufura suggawaravus

Lemma often name $\limsup(a_i) \geq \liminf$.

Achtf ORI : H akademia ou eukanei to o (=) limsup an ≤ a kai liminf a ≥ d

(+) $\Leftrightarrow \forall x_0 \rightarrow x = [(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup f(x_n) \leq f(x)) \text{ kai } (\lim_{n \rightarrow \infty} \inf f(x_n) \geq f(x))]$

H f final anu uigouerius ḡo x an $\liminf_{n \rightarrow \infty} x = \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq f(x)$

Θεωρία Η $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ exoout

i) If f has an antiderivative F on I , then $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

ii) If f has two different roots in E on f_{root} , then $\alpha_0 \alpha_1 = 0$
 i.e., $\alpha_0 \neq 0$

థర్మినా

Εσώ X μ.χ. και \geq είκει προτίμες, τα X παρ οριζόντων στην
επαρχία Κριτσήνων η $\chi: X \rightarrow \mathbb{R}$ τοιτερά εκφύγει

i) $x \sim y \Leftrightarrow u(x) = u(y)$

ii) $u \geq \text{final horizon} (= u \text{ final horizon})$

iii) $u \in U$ final arw (out, kew) nillelement $\Rightarrow u \succcurlyeq$ arw (out, kew) nillelement

iv) $u \geq v$ ou $u < v$ é o caso de $u = v$

n) $u \geq \text{avg}(\text{aumenter kupon}) \Leftrightarrow u \leq \text{avg}(\text{aumenter kupon})$

Anosmia

$$i) x \sim y \Leftrightarrow x \geq y \text{ bei } y \geq x \Leftrightarrow u(x) \geq u(y) \text{ bei } u(y) \geq u(x) \Leftrightarrow u(x) = u(y)$$

ii) $a \geq b$ is known as $t \times y \in X$ except $x \geq y \Rightarrow x \neq y$

\rightarrow U final function \propto $x^{2.4} \Rightarrow U(x) \geq U(y)$

Anoditյն (convexa)

iii) Եթե $x \in U$ համար առաջ սպասում է, որի $U^{-1}[a, b] \subseteq X$ էլեմենտ է.

$$x \in X \Rightarrow P_{\geq}(x) = \{y \in X \mid y \geq x \Leftrightarrow u(y) \geq u(x)\} = U^{-1}[a = u(x), b]\text{ կազմություն}$$

iv) Եթե $a \in U$ համար առաջ սպասում է, $P_{\geq}(x)$ էլեմենտ $\nsubseteq X$.

թ. օ. ս. U համար շեման է, ծանրելով ու $\forall x, y \in X$ չոչող է:

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\} \quad \lambda \in (0, 1)$$

Կոծովով ու $u(y) \geq u(x) \Rightarrow y \geq x$ բայց $x \geq x$

Այս $\lambda x + (1-\lambda)y \in P_{\geq}(x)$ այս ըստ համար ու $P_{\geq}(x)$ ու էլեմենտ է:

$$\Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \geq x \Rightarrow u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq u(x) = \min\{u(x), u(y)\}$$

այլիքազման սովորություն ու U համար շեման է:

թ. օ. $y \geq x, z \geq x \Rightarrow \lambda y + (1-\lambda)z \geq x, \lambda \in (0, 1)$

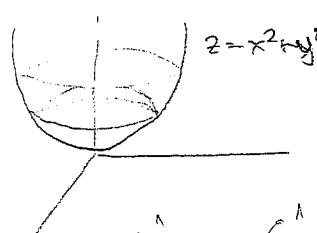
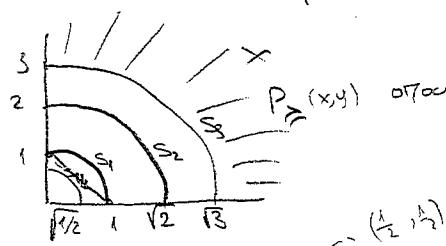
$$\Rightarrow u(\lambda y + (1-\lambda)z) \geq \min\{u(y), u(z)\} \geq u(x)$$

$$\Rightarrow \lambda y + (1-\lambda)z \geq x$$

Պարադիզա բառ $x = P_{+}^2$. $u(x, y) = x^2 + y^2$ և նույնական խնդիրը

օ. լուսադիմում ու U օրիգին շահմարտիկ և խնդիրը

առաջ $S_p = \{(x, y) \in X \mid u(x, y) = p\}$ ու p -լուսադիմում.



Ի $u(x, y)$ համար նույնական է օրիգին և շեման ու $\lambda y + (1-\lambda)z$ համար կազմություն (ու շեման պահպանական)

$$\text{առաջ } u\left(\frac{1}{2}(1,0) + \frac{1}{2}(0,1)\right) \geq \min\{u(1,0), u(0,1)\}$$

$$u(1/2, 1/2) \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \geq 1 \text{ պահպանական.}$$

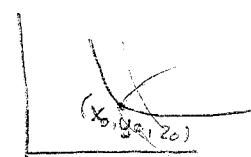
Այս առաջ կազմ և U յև առաջ կազմ \nsubseteq , այս մեջ կուն օ. լուսադիմում.

Θεώρημα: Εάν $X \subseteq \mathbb{R}^m$ μέρος και \succeq οξεία προτίμησης στο X τότε οριζεται
από την αντίστοιχη ημιπροτίμηση $\sim: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ και δικαιούται $P_0 \in X$. Η υπερχει αντίστοιχη
 $f: \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ μότε για κάθε $x \in X$, $x \sim P_0$, και εξήλικη $f(x) = u(P_0)$ θυμεται ως η φαση
την ίδια μεταβλητη, πα την x_m και το χαρακτηριστικό $x_m = f(x_1, \dots, x_{m-1})$, και $P_x(P_0) =$
 $= \text{epi}(f)$, έκαψε: $P_x(P_0)$ είναι μέρος \Leftrightarrow η f είναι μέρος.
↳ επιρρεπόντα

Παραδειγμα: Εάν $n > n$ οξεία προτίμησης του \mathbb{R}_+^n ιστος $(x, y, z) \succ (x', y', z') \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow xyz \geq x'y'z'$. Θεωρητικά \succ είναι μέρος.

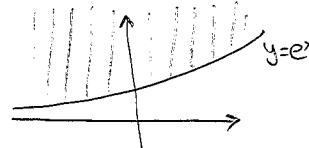
Αρχικά νοούμε ότι $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}_+^3$, το $P_x(P_0) = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \succ (x_0, y_0, z_0)\}$
είναι μέρος. Η \succ οριζεται από την αντίστοιχη ημιπροτίμηση $u(x, y, z) = xyz$

Έτσι $(x, y, z) \succ (x_0, y_0, z_0) \Leftrightarrow xyz = x_0y_0z_0 \Rightarrow z = \frac{x_0y_0z_0}{xy} = f(x, y)$
Είναι φανερό ότι $P_x(P_0) = (x_0, y_0, z_0) = \text{epi}(f)$



Οριζόντιας: Αν $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$, τότε $\text{epi}(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$
↳ ολα τα σημεία της επιρρεπόντας στην αντίστοιχη ημιπροτίμηση της f .

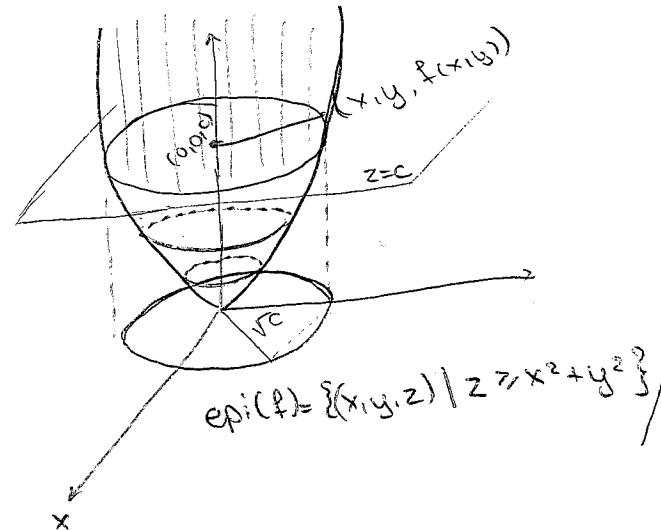
Ταξιδεύτερο: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$



$$\text{epi}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq e^x\}$$

Ταξιδεύτερο: $f(x, y) = x^2 + y^2$

Τελικά το γεράνιο ψευδο επιρρεπόντα
 $z = c \Leftrightarrow \{(x, y, z) \mid z = c\}$ το οποιο
σημειο του γερανού δια είναι $(x, y, f(x, y)) = c$
 $f(x, y) = c \Leftrightarrow x^2 + y^2 = c$.



(κυρίαρχη παραδειγματος)

Αρχικά νοούμε ότι f είναι μέρος. Είναι μέρος, γιατι $D_a^{(2)} f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Έτσι $X \subseteq \mathbb{R}^m$ μέρος και $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Η f είναι μέρος (στο X) αν $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, $\forall \lambda \in (0, 1)$, $\forall x, y \in X$

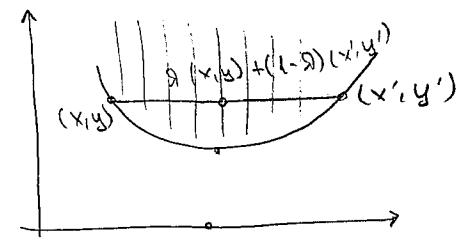
Η f είναι ανεπηρό μέρος αν $f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

Επίπεδα: Η f είναι: i) αρχή $\Leftrightarrow \text{epi}(f)$ αρχή

ii) αυτορρίζα αρχή $\Leftrightarrow \text{epi}(f)$ αυτορρίζα αρχή

Σημείωση: $\forall (x,y), (x',y') \in \text{epi}(f) \Rightarrow \exists \alpha \in (0,1) \text{ such that } f(\alpha x + (1-\alpha)x') < f(y) + (1-\alpha)f(y')$

Άριθμηση: i) Εάν $x, x' \in \text{dom } f$ είναι αρχή. Τότε $\text{epi}(f)$ αρχή. Εάν $(x,y), (x',y') \in \text{epi}(f)$



$$\left| \begin{array}{c} \vdots \vdots \\ (x,y), (x',y') \\ \{x, f(x) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{So } g(x) + (1-x)(x', y') &\in \text{epi}(f) \Leftrightarrow (g_x + (1-x)x', g_y + (1-x)y) \in \text{epi}(f) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g_y + (1-x)y' \geq f(g_x + (1-x)x') \text{ που ισχύει για } \\ &f(g_x + (1-x)y) \leq g_y + (1-x)f(y) \leq g_y + (1-x)y. \end{aligned}$$

Αντιστροφά, αν $\text{epi}(f)$ αρχή δύο $f(g_x + (1-x)y) \leq g_y + (1-x)f(y)$

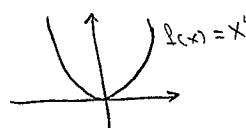
Όμως $(x, f(x)), (y, f(y)) \in \text{epi}(f) \Rightarrow g(x, f(x)) + (1-x)(y, f(y)) \in \text{epi}(f) \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(g_x + (1-x)y) \leq g_y + (1-x)f(y)$

Κριτήρια αρχότητας

Αν $X \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό και $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι και την είσοδο, έχει: i) Η f είναι αρχή $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in X$

ii) Αν $f''(x) > 0 \quad \forall x \in X$ η f είναι αυτορρίζα αρχή

To αντίστροφο της ii δεν ισχύει γιατί η $f(x) = x^4$ είναι αυτορρίζα αρχή, αλλά $f''(0) = 0$



Διακεκτίσεις περιοστούσερν παραβολών

Επίπεδα: Εάν $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, οποιο $X \subseteq \mathbb{R}^m$ αρχή, ανοικτό. Αν η f έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι και την είσοδο, έχει:

i) Η f είναι αρχή $\Leftrightarrow D_a^{(2)} f(x) \geq 0 \quad \forall x \in X \text{ και } \forall a \in \mathbb{R}^m$

ii) Αν $D_a^{(2)} f(x) > 0 \quad \forall x \in X \text{ και } \forall a \in \mathbb{R}^m$, η f είναι αυτορρίζα αρχή

Απλισμός: Για $m=2$:

$$D_a^2 f(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} a_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} a_1 a_2 + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} a_2^2 \quad a = (a_1, a_2)$$

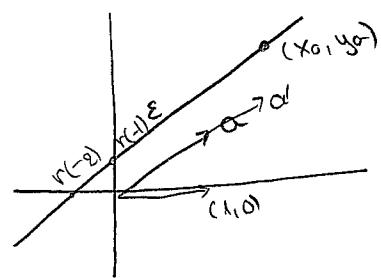
Παραγώγος υποκαταστάσεων (για αναφέρεις 2 παραβολών)

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $a = (a_1, a_2)$

$r(t) = (x, y) = (x_0, y_0) + t(a_1, a_2)$ Η γραμμή που διέρχεται

από το (x_0, y_0) και είναι παραβολής στο (a_1, a_2)

$$r(t) = (x_0 + t a_1, y_0 + t a_2)$$



$$g(t) = f(r(t)) = f(x_0 + t\alpha_1, y_0 + t\alpha_2)$$

$$g'(t) = \frac{\partial f(r(t))}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f(r(t))}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = f_x(r(t)) \alpha_1 + f_y(r(t)) \alpha_2$$

Apa $g'(0) = f_x(x_0, y_0) \alpha_1 + f_y(x_0, y_0) \alpha_2 \rightarrow$ περιποίησης της f κατά την περιποίηση της α

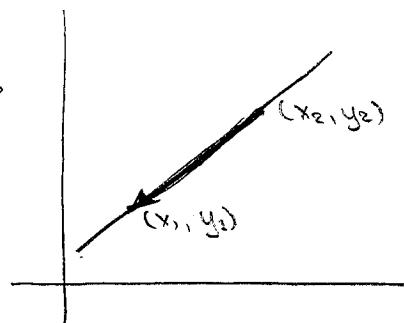
$$\begin{aligned} g''(t) &= (f_{xx}(r(t)) \alpha_1^2 + f_{xy}(r(t)) \alpha_1 \alpha_2) + (f_{xy}(r(t)) \alpha_1 + f_{yy}(r(t)) \alpha_2) \alpha_2 = \\ &= f_{xx}(r(t)) \alpha_1^2 + 2f_{xy}(r(t)) \alpha_1 \alpha_2 + f_{yy}(r(t)) \alpha_2^2 \end{aligned}$$

Apa $g''(0) = f_{xx}(x_0, y_0) \alpha_1^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0) \alpha_1 \alpha_2 + f_{yy}(x_0, y_0) \alpha_2^2 = D_a^{(2)} f(x_0, y_0)$

Έφεων $D_a^{(2)} f(x_0, y_0) \geq 0 \quad \forall (x_0, y_0) \quad \forall a$. Οδός για είναι μηδενικός. (αριθμητικής περιποίησης 2 στα μερικάτος & παραβολικής)

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \text{Θέση } f(\vartheta(x_1, y_1) + (1-\vartheta)(x_2, y_2)) \leq \vartheta f(x_1, y_1) + (1-\vartheta) f(x_2, y_2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f((x_2, y_2) + \vartheta(x_1 - x_2, y_1 - y_2)) \leq \vartheta f(x_1, y_1) + (1-\vartheta) f(x_2, y_2) \end{aligned}$$



Θεωρήστε την ευθεία $r(t) = (x_2, y_2) + t\alpha$,

$$\alpha_1 = x_1 - x_2, \quad \alpha_2 = y_1 - y_2$$

Θεωρήστε τη περιποίηση της f στην ευθεία & την εξώ:

$$g(t) = f(r(t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$g''(t) = f_{xx}(\cdot r(t)) \alpha_1^2 + 2f_{xy}(\cdot r(t)) \alpha_1 \alpha_2 + f_{yy}(\cdot r(t)) \alpha_2^2 = D_a^{(2)} f(r(t)) \geq 0$$

Apa η g είναι μηδενική συγκρίση

$$g(0) = f(x_2, y_2), \quad g(1) = f(x_1, y_1)$$

$$\forall \vartheta \in (0, 1) \Rightarrow g(\vartheta) = g((1-\vartheta) \cdot 0 + \vartheta \cdot 1) \leq (1-\vartheta) g(0) + \vartheta g(1) =$$

$$= (1-\vartheta) f(x_2, y_2) + \vartheta f(x_1, y_1) = f(\vartheta(x_1, y_1) + (1-\vartheta)(x_2, y_2))$$

ΦΥΛΛΟ 1

Ασκηση 0.1. (i) Εστω η συνάρτηση $f(x) = x$ όταν $x < 0$, $f(x) = x + 1$ όταν $x > 0$ και $f(0) = a$. Δώστε τον ορισμό της άνω και κάτω ημισυνέχειας και προσδιορίστε το a ώστε η συνάρτηση να είναι (α) άνω ημισυνεχής, (β) κάτω ημισυνεχής..

(ii) Αν $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, όπου X μετρικός χώρος. Δείξτε ότι η f είναι κάτω ημισυνεχής αν και μόνο αν $f^{-1}((-\infty, a])$ κλειστό υποσύνολο του X , για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Ασκηση 0.2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x, y) = \frac{a}{xy}$, όπου $x, y > 0$ και $a > 0$ είναι κυρτή. Στη συνέχεια δείξτε ότι η σχέση προτίμησης που ορίζεται στον \mathbb{R}_+^3 από τη συνάρτηση χρησιμότητας $u(x, y, z) = xyz$ είναι κυρτή.

Ασκηση 0.3. Εστω η σχέση προτίμησης \succeq του \mathbb{R}_+^2 που ορίζεται από τη συνάρτηση χρησιμότητας $u(x, y)$. Να παρασταθούν γραφικά οι καμπύλες αδιαφορίας της \succeq και εξετάστε αν η \succeq είναι μονότονη, κυρτή και συνεχής, όταν

$$(i) u(x, y) = xy,$$

$$(ii) u(x, y) = \min\{x, y\},$$

$$(iii) u(x, y) = \max\{x, y\},$$

$$(iv) u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Ασκηση 0.4. Ορίστε την λεξικογραφική διάταξη του \mathbb{R}_+^3 . Εξετάστε αν είναι κάτω ημισυνεχής και αν αναπαρίσταται από συνεχή συνάρτηση χρησιμότητας.

Ασκηση 0.5. Εστω η σχέση προτίμησης \succeq που ορίζεται από τη συνάρτηση χρησιμότητας u . Αν η \succeq είναι μονότονη, δείξτε ότι η \succeq αναπαρίσταται από συνάρτηση \bar{u} , ώστε $\bar{u}(0) = 0$ και $\bar{u}(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_+^n$.

Άσκηση 0.6. Έστω $X \subseteq E$, $X \neq \emptyset$, όπου E χώρος με norm.

- (i) Αν (x_n) ακολουθία του μετρικού χώρου X και $x \in X$ δείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει στο x σαν ακολουθία του X αν και μόνο αν συγκλίνει στο x σαν ακολουθία του E
- ~~(ii) Αν $A \subseteq E$, δείξτε ότι A είναι ανοικτό(αντ. κλειστό) υποσύνολο του X αν και μόνο αν υπάρχει ανοικτό(αντ. κλειστό) υποσύνολο B του E ώστε $A = B \cap X$.~~
- (iii) Αν $A = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$, $B = \{x \in E : \|x - x_0\| \leq 1\}$, όπου $\|x_0\| = 3$ και $X = A \cup B$, εξετάστε αν τα A, B είναι ανοικτά, κλειστά υποσύνολα του X και αν ο μετρικός χώρος X είναι συνεκτικός.

Άσκηση 0.7. Δώστε τον ορισμό της σχεδόν κοιλης συνάρτησης και σχεδόν κυρτής συνάρτησης και δείξτε ότι κάθε μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι σχεδόν κοιλη και σχεδόν κυρτή.

Συμπλήρωση

Θεώρημα: Αν $K \subseteq \mathbb{R}^m$ οι παραπάνω προδοσίες είναι ισοδύναμες:

- i) Το K είναι μετώρα και φραγκένο
- ii) Κάθε αυθαίδια του K έχει υποαυθαίδια που συγχίνει σε στοιχεία του K

Άσκεση (i) \Rightarrow (ii)

Έστω $\{x_n\}$ αυθαίδια του K . $x_n = (x_n(1), x_n(2), \dots, x_n(m))$

$\|x_n\| \leq M + n$ ενδη το K φραγκένο, αφού $|x_n(i)| \leq M + n$ (φραγκένε) Άρα η υποαυθαίδια

$\{x_{kn}(1)\}$ της $\{x_n(1)\}$ που συγχίνει. ~~Εστω $\{x_{km}(1)\} \rightarrow x(1)$. Θεωρήστε επι~~ η υποαυθαίδια $\{x_{kn}\}$. $x_{kn} = (x_{kn}(1), x_{kn}(2), \dots, x_{kn}(m))$, οπού υπάρχει υποαυθαίδια

$$\downarrow \\ x(1)$$

$\{x_{2n}\}$ της $\{x_n\}$ με $x_{2n}(i) \rightarrow x_i \quad \forall i = 1, \dots, m$, τοτε $x_{2m} \rightarrow x = (x(1), \dots, x(m)) \Rightarrow$
 $\Rightarrow x_{2m} \rightarrow x \quad |x_{2n}(i) - x(i)| < \varepsilon \quad \forall i, \forall n \geq n_0$

Τοτε $x_{km} \rightarrow x \Rightarrow x \in K$ (Κ. είναι φραγκένο).

Αν το K δεν είναι φραγκένο, τότε $\exists n \in \mathbb{N} \exists x_n \in K : \|x_n\| > n$. Ανο την (ii), η $\{x_n\}$ έχει αριθμητικά υποαυθαίδια, Έστω της $\{x_{kn}\}$. Άρα η $\{x_{kn}\}$ φραγκένειν. Απότο θατού $\|x_{kn}\| > k_n$, $\{k_n\}$ δη φραγκ. υπαρχ. τοτε \mathbb{N} .

• Αν $K \subseteq \mathbb{R}^m$ μετώρα και φραγκένο, και $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση, τοτε f παρένει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο K , δηλ. $\exists x_1, x_2 \in K : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in K$

Άσκεση: i) Η f είναι φραγκένη στο K , δηλαδή $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \quad \forall x \in K$

$f(x_n) \rightarrow +\infty, x_n \rightarrow x_0 \in K, f(x_n) \rightarrow f(x_0) = +\infty$ (ΑΤΟΠΟ)

Άρα υπάρχει $\sup \{f(x) | x \in K\} = m$. Αν $\exists x_n \in K : m - \frac{1}{n} < f(x_n) < m \quad \exists x_n \rightarrow x \in K, f(x_n) \rightarrow f(x) = m \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = \max \{f(t) | t \in K\}$$

$$\frac{f(x_n)}{m - \frac{1}{n}}$$

Οπότε: Έστω X μετώρας κώνος. Ο X δείχνει αυτονόμης αν ηδή αυθαίδια του X έχει υποαυθαίδια που συγχίνει σε στοιχείο του X . Τοτε ηδή συνάρτηση $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ παρένει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο X , δηλ. υπάρχουν $x_1, x_2 \in X : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in X$. (Η αναδιδική της πραγματικότητα)

Να γίνει το συγχέδωμα I, από την ισοοψία των πλούτων. Παράδοση Ρηπ. 24 λειτουργία

Θεώρηση: Αν X περιέχει κύριος, αι παραπάνω προτάσεις είναι ισοδύναμες

i) Ο X είναι αυτομάτης

ii) Για κάθε οικογένεια (A_i) ιερού ανοικτών υποουδημάτων του X ωστε $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ υπάρχει $I' \subseteq I$ περιεχόμενο ωστε $X = \bigcup_{i \in I'} A_i$ (κάθε ανοικτή υποδιάτημα του X , είχε περιεχόμενο ουσιαστικό).

Θεώρηση: Αν X περιέχει κύριος, τα παραπάνω είναι ισοδύναμα:

i) Ο X είναι αυτομάτης

ii) Για κάθε οικογένεια (F_i) ιερού ανοικτών υποουδημάτων του X , με την ιδιότητα: $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$, για κάθε $I' \subseteq I$ περιεχόμενο, έχει $\bigcap_{i \in I'} F_i \neq \emptyset$.

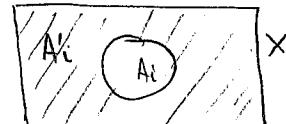
(κάθε οικογένεια ανοικτών υποουδημάτων του X , με την ιδιότητα της περιεργασίας της έχει ήδη να την τοπίζει)

Απόδειξη: (ii) \Rightarrow (i) Εάν (A_i) ιερού ανοικτών υποουδημάτων του X , με $\bigcup_{i \in I} A_i = X \Leftrightarrow X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = (\bigcup_{i \in I} A_i)' = \bigcap_{i \in I} A_i' = \emptyset$. Θέσο $\exists I' \subseteq I$ περιεχόμενο ωστε $\bigcup_{i \in I'} A_i = X \Leftrightarrow \bigcap_{i \in I'} A_i' = \emptyset$

Αν δεν υπάρχει τέτοιο I' πρέπει $\bigcup_{i \in I} A_i \subsetneq X \wedge I' \subseteq I$ περιεχόμενο. $\Leftrightarrow \bigcap_{i \in I} A_i' \neq \emptyset$

Α $I' \subseteq I$ πρέπει, τότε (A_i') ιερού ανοικτών υποουδημάτων του X με την ιδιότητα της περιεργασίας της. Άρα $\bigcap_{i \in I} A_i' \neq \emptyset$ ΑΤΟΤΟ. Άρα $\exists I' \subseteq I$ περιεχόμενο.

$\bigcup_{i \in I} A_i = X$



Θεώρηση: Εάν X περιέχει κύριος \Leftrightarrow Το γιατί να διώ νήματενής σχέσην προσήνος του X . Τότε $n \geq$ πλήρης πέντετη της ουσιαστικής x_0 του X , δηλ. $\exists x_0 \in X : x_0 \geq x \wedge x \in X$). Αν X μηδενί \geq αντρά μήποτι, τότε το x_0 είναι βασιδιός.

($H =$ διώ νήματενής εν $\forall x \in X : P_H(x) = \{y \in X : y \geq x\}$ μήποτι)

Απόδειξη: Αν δ.ο. $\bigcap_{x \in X} F_x \neq \emptyset$, τότε δείχνεται έχει επειδεικνύει, ότι $\exists x_0 \in \bigcap_{x \in X} F_x$, έχει $\forall x_0 \geq x \wedge x \in X$. Όπως $(F_x)_{x \in X}$ οικογένεια ανοικτών υποουδημάτων του X .

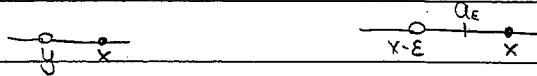
Εναδήν ο X είναι αυτομάτης, αραιί υπό $F_{x_1}, \bigcap F_{x_2} \cap \dots \cap F_{x_n} \neq \emptyset \wedge x_1, \dots, x_n \in X$ να $\forall n \in \mathbb{N}$. Εναδήν $n \geq$ είναι σήμινη, δηλ. κάθε "δύο συντεταγμένες.. περατί τους, πινοράτε να υποδ. δια $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$, τότε $\bigcap_{i=1}^n F_{x_i} = F_{x_n} \neq \emptyset$ κατί $x_n \in F_{x_n}$. Άρα n οικογένεια $(F_x)_{x \in X}$ έχει την ιδιότητα της περιεργασίας της, άρα $\bigcap_{x \in X} F_x \neq \emptyset$

Forw: $A \subseteq \mathbb{R}$. Av undpxse $x \in \mathbb{R} : x \geq a \text{ Haet } A$ vov $\forall \varepsilon > 0$, tice

$\exists a_\varepsilon \in A : a_\varepsilon \in (x - \varepsilon, x]$, tice tice oce to x elvo to supremum to

A vov ypdpxse: $x = \sup A \Leftrightarrow \forall x : x \geq a \text{ Ha}$

vov $(y, x] \cap A \neq \emptyset \text{ Hy} < x$.



Av $A \subseteq \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R} : x \leq a \text{ Haet } A$ vov $\forall \varepsilon > 0 \exists a_\varepsilon \in A : a_\varepsilon \in [x, x + \varepsilon)$

Oeupn/a: $\sup A = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}, x \geq a \text{ Haet } A \text{ vov } y \in \mathbb{R}, y \geq a \text{ Ha} \Rightarrow$

$\Rightarrow y \geq x$, dñledni to x elvo to elixirov dñv qayfja to A .

Anoðfn: Eotw $\sup A = x$. Tice $x \in \mathbb{R}, x \geq a \text{ Haet } A$. Forw $y \geq a \text{ Ha}$.

Qðo $y \geq x$. Forw $y < x \Rightarrow \exists a \in (y, x] \Rightarrow a^{e_A} > y$ ATOM

A Elvo iñapfnz eðhx aveq qayfjars (supremum)

Kadz dñv qayfjars erorvado to \mathbb{R} exel supremum \Leftrightarrow volec volec qayfjars, exel infimum

Oeupn/a: Av $I_v = [a_v, b_v] \subseteq \mathbb{R}, I_{v+1} \subseteq I_v \text{ vov } b_v - a_v \rightarrow 0$,

tice $\bigcap_{v=1}^{\infty} I_v = \{x\}, x \in \mathbb{R}$.

Anoðfn: $I_{v+1} \subseteq I_v \forall v \Rightarrow a_v \uparrow$ vov $b_v \downarrow$. Enions: $\forall v, b_v \Rightarrow a_v \leq b_v$

jaðr $a_v \leq b_v \Rightarrow a_v \leq a_p \leq b_p$. Av $p < v \Rightarrow a_v \leq b_v \leq b_p$. Aga, a_v kó orðfðr $a_v \leq b_p$. $\forall v \sup\{a_v\} = a \leq b_p$

Aga $a \leq b_v \forall v, a \leq b = \inf\{b_v\}$ exafe $a \leq a \leq b \leq b_v \forall v$

$0 \leq b - a \leq b_v - a_v \rightarrow 0 \Rightarrow b = a = x, x \in I_v \forall v \in \mathbb{N}$

Av $x' \in \bigcap I_v \Rightarrow |x - x'| \leq b_v - a_v \rightarrow 0 \Rightarrow x' = x$

Oeupn/a: Kadz qayfjars aveqfjala to \mathbb{R} exel unavoladila rnaqfjars

Anoðfn: Forw n unavoladila av: $a \leq a_v \leq b \forall v$ $a \xrightarrow{\text{unavoladila}} b$

Dixordju to $[a, b]$ vov eotw I_v éva unavoladila rnaqfjars dñv qayfjars dñv unavoladilas. Dixordju to I_v vov naþvur exel unavoladila

I_v rnaqfjars dñv qayfjars, vðn. Forw rnaqfjars dñv unavoladila $(I_v)_{v \in \mathbb{N}}$, fñr $I_{v+1} \subseteq I_v \forall v$ vov $\mu(I_v) = \frac{b-a}{2^v}$. Tice $\bigcap_{v=1}^{\infty} I_v = \{x\}$

Forw n unavoladila av, dñv $a_v \in I_v \forall v$. Forw exafe:

$$\left. \begin{array}{l} a_{k_1}, a_{k_2}, \dots \in I_1 \\ a_{k_2}, \dots \in I_2 \\ \vdots \\ a_{k_3}, \dots \in I_3 \end{array} \right\} \Rightarrow a_{k_v} \in I_{v_0} \quad \forall v \geq v_0$$

$$\text{Qðo } a_{k_v} \rightarrow x, a_{k_v}, x \in I_n \Rightarrow |a_{k_v} - x| \leq \mu(I_v) = \frac{b-a}{2^v}$$

Εμπειρία: Av $K \subseteq \mathbb{R}$, example: K έτενται και γραφτούν \Leftrightarrow ωδή ανοδική.
Στα ταυτόκλητα και αρχικές σε σύγκλιση των ανοδικών των K
 K έτενται \Leftrightarrow ωδή ανοδική των πιο μεγάλων, αρχικές σε σύγκλιση των K

Έστω $\sup(A) = x$. Av $x \in A$, τότε x είναι maximum των A . ($x = \max A$)

Av $x \notin A$, υπάρχει $a_n \in A$, $a_n \uparrow$ με $\lim a_n = x$.

$$a_1 \in A \Rightarrow a_1 < x,$$

$$\frac{a_1 + x}{2}, \exists a_2 \in (j_1, x)$$

$$j_2 = \frac{a_2 + x}{2} \Rightarrow \exists a_3 \in (j_2, x), a_3 \uparrow 0 < x - a_3 < \frac{x - a_1}{2^{n-1}} \rightarrow 0$$

Εμπειρία: Av $\sup A = x$, τότε το x είναι το μεγαλύτερο ανδρικό στο διάστημα $\sup A$ συγκλισιών υποσυνολών των A .

Ανοδική: Υπάρχει ανοδικία $a_n \in A : a_n \rightarrow x$ (πρώτη παρατήρηση)

Έστω $\exists a' \in A : a' \rightarrow x' > x$

$$x'' = x + \frac{(x - x')}{2} > x \Rightarrow \text{έχουμε } a'' > x - \varepsilon$$

δικαιούεται ν. Απότολο γιατί x'' είναι φράγκο των A

Σχέσεις Προτίμησης!

Έστω \geq σχέση προτίμησης που ορίζεται στο X . Av υπάρχει u :

$X \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $x, y \in X$ έχουμε:

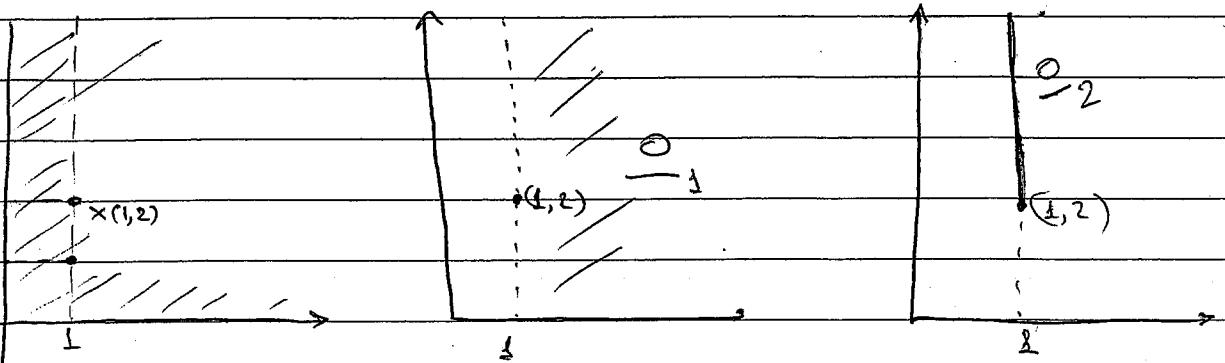
$x \geq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$: Τερικόν \geq αναπλίσται ανδρική συνάρτηση u

Η λεξικογραφίαν σχέσης προτίμησης \geq στο \mathbb{R}^n :

- i) $\sum_{\text{των }} \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \geq (y_1, y_2) \Leftrightarrow [(x_1 > y_1) \text{ ή } (x_1 = y_1 \text{ και } x_2 \geq y_2)]$
- ii) $\sum_{\text{των }} \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) \geq (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow [(x_1 > y_1) \text{ ή } (x_1 = y_1 \text{ και } x_2 \geq y_2 \text{ και } x_3 \geq y_3)]$

Έστω $X = \mathbb{R}_+^2$ και \geq η λεξικογραφία σχέσης στο X . Av $x = (1, 2)$ και $P_x(x) = \{y = (y_1, y_2) | y \geq x\} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2 | y_1 \geq 1 \text{ και } y_2 \geq 2\}$

$$= \Omega_1 \cup \Omega_2$$



$H \Rightarrow$ Είναι ανωμαλούς σε
 $\forall x \in X \Rightarrow P_x(x)$ Είναι υλεκτό.
 Το $P_x(1,2)$ δεν είναι υλεκτό, γιατί
 $(\frac{1+1}{n}, 0) > (1,2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $(\frac{1+1}{n}, 0) \rightarrow (1,0) \not> (1,2)$
 Άρα $P_x(1,2)$ δεν είναι υλεκτό
 $\Rightarrow n \geq 1$ αν και μόνο.

H Δεζηνογράφική σχέδιο των \mathbb{R}^2 δεν ανταπιστρέψει το συνόριο.
Anoī: Είναι οι $n >$ αναληπτικοί συντομογράφοι.

$\forall x \in \mathbb{R}$ έχουμε $(x,2) \succ (x,1)$ από
 $u(x,1) < u(x,2)$

Απενιάρχει παρόλο πολλοί ιστεί
 $u(x,1) < r_x < u(x,2)$

Θα δ.ο. ν αναληπτικά : $\mathbb{R} \ni x \rightarrow f(x) = r_x$ Είναι 1-1.

Άρει ότοι : $\forall x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

Έστω $x < x'$ τοις έχουμε : $(x,1) < (x,2) < (x',1) < (x',2) \Rightarrow$

$u(x,1) < f(x) < u(x,2) < u(x',1) < f(x') < u(x',2)$

Άρα $f(x) \neq f(x') \Rightarrow f$ είναι 1-1.

Άν $f(\mathbb{R}) = Q' \subseteq \mathbb{Q}$, τότε $f^{-1} : Q' \xrightarrow{\text{1-1}} \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ αριθμητικό

ΆΤΟΜΟ \square

Θεόδηνα: (Αναρρίχωση στούδιου προτίμων)

Έσω η εξίσων προτίμων \Rightarrow Έσω αριθμοί στο μέτρο X . Αν σX είναι συνεταιρισμός και διακυριστής και $n \Rightarrow$ έσω συνεχής, τούτη $n \Rightarrow$ αυτοπροτάσσει αριθμού συνέχης $n: X \rightarrow \mathbb{R}$

Ο μέτρος X είναι διακυριστής αν υπέβαινε αριθμητικό υποσύνολο D του X , ώστε $D = X$.

Ο μέτρος X είναι συνεταιριστής αν δεν βρίσκεται χραστί και σύμφωνα δύο μη συνεχή σύνολα αντιτίθενται του.

Παραδείγμα: A) $X = \mathbb{R}$ είναι συνεταιριστής

$$X = \mathbb{R}^n \quad " \quad " \quad \text{μέτρος } X$$

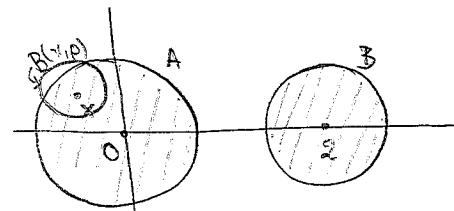
B) Έσω $X = A \cup B$, συνεχής και συνίστα μέτρος X

$$d_X(x,y) = \|x-y\|, \quad A \subseteq X \quad B_X(x,r) = \{x \in X \mid d_X(x,y) < r\} = B(x,r) \cap X$$

A ανοιχτό υποσύνολο του X

$$B \quad " \quad " \quad " \quad "$$

$$X = A \cup B, \quad A \cap B = \emptyset, \quad A, B \neq \emptyset \Rightarrow X \text{ οχι συνεταιριστής}$$



Πρόσαρση: Έσω σα ορισθείται X είναι συνεταιριστής και υπόδειξη $D \subseteq X$ ώστε $D = X$. Αν τ θερμή στούδιου προτίμων του X και $n \Rightarrow$ έσω συνεχής, τούτη για όλες $x, y \in X$ ιστος $x < y$, υπόδειξη $z \in D$ ώστε $x < z < y$

Άρρενηση: Στην άρρενηση, ορίζεται η σύνολη $P_x(y) = \{z \in X \mid x < z < y\}$. Η τ είναι

συνεχής, αλλά τα $P_x(y), P_y(x)$ ανοιχτά υποσύνολα του X

Έσω σα $w \in P_x(y) \cap P_y(z)$. Τότε $P_x(y) \cap P_y(z)$ ανοιχτό \Rightarrow

$\Rightarrow \exists B(w,r) \subseteq P_x(y) \cap P_y(z)$ Επομένως: $D = X$, υπόδειξη

$z \in D \cap B(w,r) \Rightarrow x < z < y \checkmark$

Αριθμός $P_x(y) \cap P_y(z) \neq \emptyset$. Έσω $P_x(y) \cap P_y(z) = \emptyset$. Τότε $P_x(y) = P_y(z)$ (a)

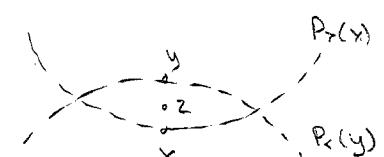
και $P_x(y) = P_y(z)$ (b), γιατί για το (a) ξακούψε: Αν $z \in P_x(y) \Rightarrow z \geq y \Rightarrow z > x$

$\Rightarrow P_x(y) \subseteq P_y(z)$

Για το (b) ξακούψε, έσω $z \in P_x(y)$. Θερμό: $z \geq y$. Αν $z > y \Rightarrow x < z < y$: ΑΤΟΤΟ, γιατί $P_x(y) \cap P_y(z) = \emptyset$. Οπού ξακούψε: $X = P_x(y) \cup P_y(z) = P_x(y) \cup P_y(z)$

ΑΤΟΤΟ γιατί σX είναι συνεταιριστής $y \in P_x(y)$ και $x \in P_y(z)$

\Rightarrow άνω μήλοτα \Rightarrow
 $\Rightarrow P_x(y), P_y(z)$ είναι συνεχής
 $\Leftrightarrow P_x(y)$ είναι ανοιχτό



Καθέτης στο $E = \mathbb{R}^m$ θα το ονομάζουμε είναι ο \mathbb{R}_+ , δηλαδή

$E_+ = X = \mathbb{R}_+^m$ (յα ευαλεία). Αν $P \in \mathbb{R}_+^m$ διαν τηλερ ή $w \in \mathbb{R}_+$, $w > 0$, τότε: $B_{P,w} = \{x \in \mathbb{R}^m_+ \mid p \cdot x \leq w\}$ ονομάζεται προσβλητικός

Θεώρημα: Αν $P > 0$, τότε $B_{P,w}$ είναι αυθαίρετος. Αν το $P > 0$, το $B_{P,w}$ δεν είναι αυθαίρετος. Η για το $m=2$ (οιναρχία με 2 αγαθά) η $P=(3,0)$, $w=10$, έχει:

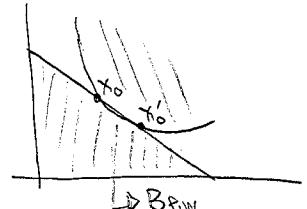
$$B_{P,w} = \{x \in \mathbb{R}_+^2 \mid p \cdot x \leq 10 \Leftrightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq 10 \Leftrightarrow 3x_1 + 0x_2 \leq 10\}$$

Μετατοπίσμα της ουδιότητος προσβλητικάς

Θεώρημα: Αν n οχέαν προσβλητικά είναι διανωτά τηλερ P είναι αυθαίρετος, τότε $n \geq 1$ προσβλητικά είναι τα διάδικτα ανθεία του $B_{P,w}$. Αν επιδιέλαν $n \geq 1$ είναι αυθαίρετοι υπότιμοι, προσβλητικά είναι $B_{P,w}$. Αυθαίρετος είναι ανθεία του $B_{P,w}$.

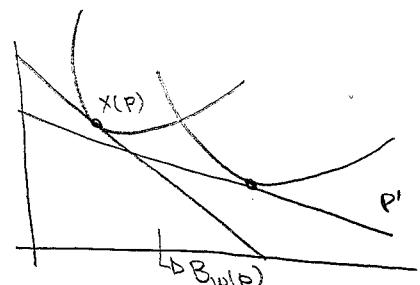
Άσκηση: Το $B_{P,w}$ είναι αυθαίρετος μονοδιάστατο του \mathbb{R}^2 , ενδιβή το P είναι αυθαίρετος διάστατος. Η \geq είναι διανωτά προσβλητικά, εφεύρεται $n \geq 1$ προσβλητικά τηλερ τηλερ οι κάθοι ανθεία $x_0 \in B_{P,w}$. Επειδή $n \geq 1$ είναι αυθαίρετοι υπότιμοι. Καθέτης στο $n \geq 1$ προσβλητικά είναι x_0, x'_0 , με $x_0 \neq x'_0$. Θέλουμε $x_0 = x'_0$

$$\text{Έστω } x_0 \neq x'_0. \text{ Τότε } \begin{cases} x'_0 \geq x_0 \\ x_0 \geq x'_0 \\ x_0 \neq x'_0 \end{cases} \Rightarrow q x_0 + (1-q) x'_0 \geq x_0$$



Το $q x_0 + (1-q) x'_0 \in B_{P,w}$ γιατί το $B_{P,w}$ είναι υπότιμο. Άτοπο, γιατί $n \geq 1$ προσβλητικά είναι x_0 .

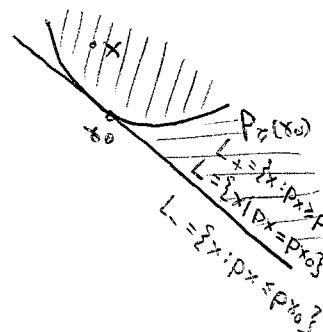
$$B_w(P) = \{x \in \mathbb{R}^m_+ \mid p \cdot x \leq w\}, w = \begin{pmatrix} 1000 & 1000 & 1000 \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1000 & 800 & 200 & 150 \end{pmatrix}$$



Έστω n οχέαν προσβλητικά \Rightarrow έστω οριζόντιο το $X = \mathbb{R}_+^m$ ή έστω $P \in \mathbb{R}_+^m$ διανωτά τηλερ. Αλλα το P αντιστητεί στο οχέαν \Rightarrow τότε $x_0 \in X$ ή για όλες $x \in X$, με $x \geq x_0 \Rightarrow P \cdot x \geq P \cdot x_0 \Rightarrow$ αξία

Έστω στο $n \geq 1$ προσβλητικά είναι την ουδιότητο προσβλητικά ή.

Τότε $P_{\geq}(x_0) = \{x \mid u(x) \geq u(x_0)\}$. Θέλουμε $g_{\text{ανθεία}}(x)$ ανθεία στο οχέαν \Rightarrow το ανθεία x_0 .



Kupros aneit. oov \mathbb{R}^n (convexa)

To grad $f(P_0)$ omphise to dnuw tifika tns f ova omphio P_0

Etuw $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, orou $X \subseteq \mathbb{R}^m$ mprd van etow P_0 concepied omphio ta p. Ar n f exis convexes hiperbolas ruputns tifika tns de fia repiorxi ova P_0 van grad $f(P_0) \neq 0$ exaue: i) Av $P_1 \in X$, $P_1 \neq P_0$, $r(t) = P_0 + t(P_1 - P_0)$, $t \in \mathbb{R}$ van $g(t) = f(r(t))$, $t \in \mathbb{R}$. u... $\exists \delta > 0$: g neperiorfem ova $[0, \delta]$, wat naevre elaxion tifini ova 0, dñedn $g(0) \leq g(t) \forall t \in [0, \delta]$, tce $(P_1 - P_0) \cdot \text{grad } f(P_0) \geq 0$ Ova n g naevre hiperbolas tifini ova 0, exaue $(P_1 - P_0) \cdot \text{grad } f(P_0) \leq 0$

ii) Av to dnuw tifika tns f ova P_0 elou mprd, exaue da: grad $f(P_0) \cdot (P - P_0) \geq 0$ jka uide $P \in X$, jke $f(P) \geq f(P_0)$

Anađan oov \mathbb{R}^3 : !sos da eđeclores!

$$g(t) = f(r(t)) = f(x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0), z_0 + t(z_1 - z_0))$$

$$g'(t) = f_x(r(t))(x_1 - x_0) + f_y(r(t))(y_1 - y_0) + f_z(r(t))(z_1 - z_0)$$

$$\Rightarrow g'(0) = \text{grad } f(r(0)) \cdot (P_1 - P_0)$$

$$g'(0) = D_{(P_1 - P_0)} f(P_0) = \text{grad } f(P_0) \cdot (P_1 - P_0)$$

$|g'(0)| = \|\text{grad } f(P_0)\| \cdot \|P_1 - P_0\|^{\frac{1}{2}} \cdot |\cos w|$. Etuw da n $g|_{[0, \delta]}$ elaxionconerit ova 0. Tce exaue: $g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t}$. Apa $\text{grad } f(P_0) \cdot (P_1 - P_0) \geq 0$

ii) To dnuw tifika $S_{\geq f(P_0)} = \{P \in X \mid f(P) \geq f(P_0)\}$ tns f ova P_0 elou mprd.

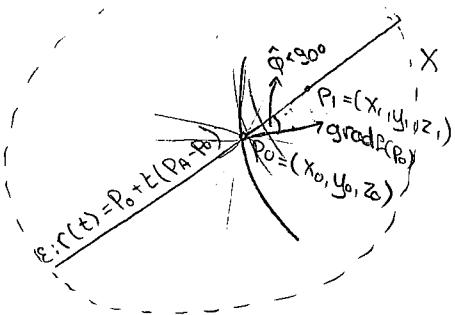
$$P \in S_{\geq f(P_0)} \Rightarrow \exists P + (1-\lambda)P_0 \in S_{> f(P_0)} \forall \lambda \in [0, 1].$$

Jf f neperiorfem ova $\varepsilon: r(t) = P_0 + t(P - P_0)$, naevre elaxion tifini ova P_0 . Anlađn n $f(r(t))$ neperiorfem ova $[0, 1]$ naevre elaxion tifini ova 0.

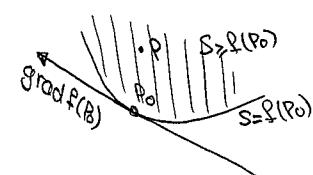
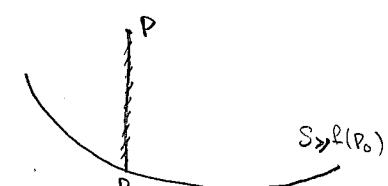
Apa $\text{grad } f(P_0) \cdot (P - P_0) \geq 0$

$$\Rightarrow f: X \rightarrow \mathbb{R}, P_0 \in X \quad S_{= f(P_0)} = \{P \in X \mid f(P) = f(P_0)\} \rightarrow n \text{ laevrufum tns f ova } P_0$$

$$S_{> f(P_0)} = \{P \in X \mid f(P) > f(P_0)\} \rightarrow \text{to dnuw tifika tns f ova } P_0$$



To grad uateudueren npos
tu yndorpes laevrufum

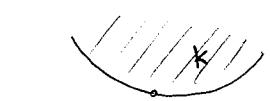
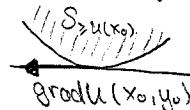


Έστω Ε χώρος με νόμον, $K \subseteq E$ μέρος της f γραφής. ουρανολογία

($f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E$) και έστω $x_0 \in K$
Αν $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in K$, θετε επειδή τη f αντικαίζει στο K στο x_0 .

$u: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^m$ μέρος, $x_0 \in X$ συναρτητικό μέρος της X .

Αν το $S_{\geq u(x_0)} = \{x \in X \mid u(x) \geq u(x_0)\}$ μέρος, τότε το $\text{grad } u(x_0)$ αντικαίζει στο $S_{\geq u(x_0)}$ στο x_0



$$\begin{aligned} K &= \{x \mid f(x) \geq f(x_0)\} \\ x_0 &\mapsto H-f(x_0) = \{x \mid f(x) - f(x_0) \geq 0\} \\ &= \{x_0\} + N\{t\} \\ 0 &= \{x \mid f(x) = 0\} \end{aligned}$$

Θεώρεια: Έστω n οριζόντια προσεκτίνουσες \cong ταύτα $X = \mathbb{R}_+$. Αν $n \geq$ οριζόντια
αντικαίζει στην ουρανολογία $n: X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 συναρτητικό της X

Η n έχει συνεχείς λεπτής πορειών πρώτης καρδίας σε κάθε περιοχή του x_0 και το
 $P_{\geq n(x_0)}$ μέρος, τότε το $\text{grad } n(x_0)$ αντικαίζει στην οριζόντια \cong στο μέρος x_0 (δηλ. $\forall x \neq x_0$
έχει $\text{grad } n(x_0) \cdot x > \text{grad } n(x_0) \cdot x_0$)

Άρθρο:

Τηρούσαντας: Προσδιορίζεται διάνυσμα είμιν που αντικαίζει στην οριζόντια \cong ταύτη \mathbb{R}_+ που
οριζόντια από την n , στο μέρος (x_0, y_0) σαν

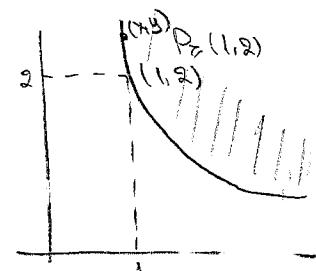
$$i) u(x, y) = x^{1/3} y^{2/3}, (x_0, y_0) = (1, 2)$$

$$ii) u(x, y) = \min\{x, y\}, (x_0, y_0) = (1, 1)$$

Άνων:

i) Το (x_0, y_0) είναι συνεχείς σημείο της \mathbb{R}_+^2 , $n(u(x, y))$

Έχει συνεχείς λεπτής πορειών πρώτης καρδίας σε κάθε περιοχή του (x_0, y_0)
 $u_x = \frac{1}{3} x^{-2/3} y^{2/3}, u_y = \frac{2}{3} x^{1/3} y^{-1/3}$



$$\text{grad } u(x, y) = (u_x(x, y), u_y(x, y))$$

$$\text{grad } u(x_0, y_0) = \frac{1}{3} \left(2^{2/3}, 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{1/3} \right) = P$$

Οδος το $P_{\geq n}(x_0, y_0)$ είναι μέρος. Έστω $(x, y) \sim (1, 2) \Leftrightarrow x^{1/3} y^{2/3} = 2^{2/3} \Rightarrow y^{2/3} = 2^{2/3} x^{-1/3} \Rightarrow$
 $\frac{y^2}{x^2} = 2^2 \xrightarrow[y>0]{} y = 2\sqrt{x} = f(x)$

Γνωρίζεται ότι $P_{\geq n}(1, 2)$ μέρος \Leftrightarrow στη $y = f(x)$ είναι μέρος

$$f'(x) = -\frac{1}{2} 2x^{-3/2}, f''(x) = \frac{3}{2} x^{-5/2} > 0 \quad \forall x > 0. \text{ Άση } n f(x), x > 0 \text{ μέρος} \Rightarrow P_{\geq n}(1, 2) \text{ μέρος} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{3} \left(2^{2/3}, 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{1/3} \right) \text{ αντικαίζει στην οριζόντια } \cong \text{ στο } (1, 2)$$

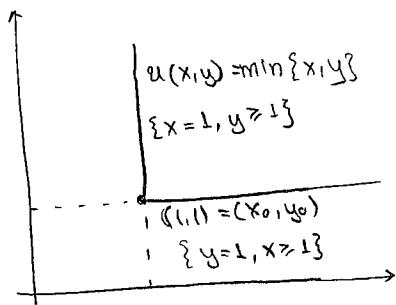
$$i) u(x,y) = \min\{x,y\}$$

Η καθημερινή αδιαφορίας της \geq που ισχύει από το $(1,1)$ είναι

$$\text{όπως φαίνεται από } \min\{x,y\} = 1 \Leftrightarrow (x=1 \wedge y \geq 1) \vee (x \geq 1, y=1)$$

Περατώντας στα δύο υπάρχοντα περιπτώσεις παραχωρούνται από

$$\text{ομβόλο } (1,1) : \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{u(x,1) - u(1,1)}{x-1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{u(x,1) - u(1,1)}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$$



Οδός γιατί $\min\{x,y\} \geq 1 \Leftrightarrow p_1 x + p_2 y \geq p_1 + p_2$

$$\text{Ισχεία γιατί } x \geq 1 \Rightarrow p_1 x \geq p_1 \cdot 1 = p_1$$

$$y \geq 1 \Rightarrow p_2 y \geq p_2 \cdot 1 = p_2$$

Έτσος $X = \mathbb{R}_+^m$ και \geq σχέσης προσήμονας που ορίζεται από x

Θεώρημα: Αν $p > 0$ και $n \geq$ είναι ημικυρικής, τότε μεγαλούμενος από αυτό το προϊστορικό $B_{p,w}$ (όπου $w > 0$) από ομβόλο x_0 , και λοιπάν.

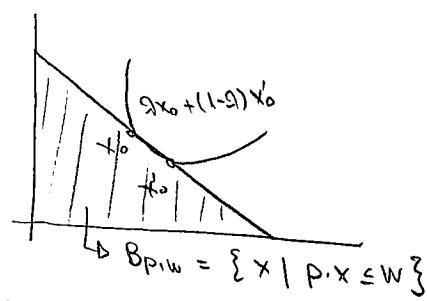
i) Αν $n \geq$ είναι και τοπικά βιώνομης, τότε x_0 είναι από ευρισκημένης

περιοριστικής ημικυρικής $\leq \text{SOS}$ έκτασης $p \cdot x_0 = w$ (ημέρα Ι.6)

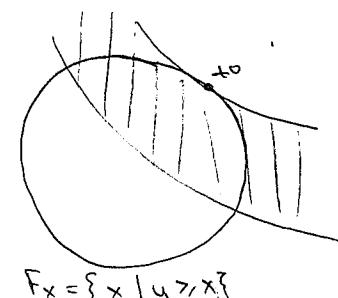
Αναδειχτικό: Ενδιβή $p > 0$, τότε $B_{p,w}$ είναι αυτομάτης, και ενδιβή $n \geq$ αυτή ημικυρικής έκτασης αποδείξεις στα μεγαλούμενα από ομβόλο $x_0 \in B_{p,w}$

Άσθ. του ii) Έτσος από $n \geq$ ημικυρικής από x_0 και x'_0 , με $x'_0 \neq x_0$

(δηλ. $x_0 \geq x \wedge x \in B_{p,w}$ και $x'_0 \geq x \wedge x \in B_{p,w}$)



$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } x_0 \geq x'_0 \\ x'_0 \geq x'_0 \\ x_0 \neq x'_0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} g x_0 + (1-g)x'_0 &\geq x'_0 \wedge g \in (0,1) \end{aligned} \right.$$



ΑΤΟΓΟ, γιατί $g x_0 + (1-g)x'_0 \in B_{p,w}$ (Το $B_{p,w}$ είναι ημιρά, $x_0, x'_0 \in B_{p,w}$)
και είναι ημικυρικής από το x'_0 .

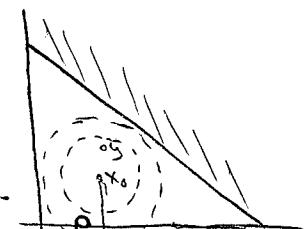
Η σχέση \geq είναι τοπικά βιώνομης, αν $\forall x \in \mathbb{R}_+^m$ και ύπολε $\varepsilon > 0$, $\exists y \in B(x, \varepsilon) \cap$

Έτσος $x_0 \in B_{p,w}$ και $x_0 \geq x \wedge x \in B_{p,w}$. Οδός $p \cdot x_0 = w$.

Έτσος δια $p \cdot x_0 = a < w$, $H_- = \{x \in \mathbb{R}^m \mid p \cdot x < w\}$ αντίτυπος

γιατί $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ και $f(x) = p \cdot x$ ημικυρικής και $H_- = f^{-1}(-\infty, w)$ και $x_0 \in H_-$.

Επιδειύσουμε $\exists B(x_0, \rho) \subseteq H_-$ $\frac{\geq w}{\text{την ώρα}} \exists y \in B(x_0, \rho) \cap \mathbb{R}_+^m$ με $y > x_0$. $y \in B_{p,w}$ γιατί $y \in \mathbb{R}_+^m, y \in H_- \Rightarrow$



Ωδηση: Αν $p > 0$, $w > 0$ και $n \geq 1$ μετρέσις, τότε $n >$ μετρονομία
οε κάποιο αριθμό $x_0 \in B_{p,w}$ | τότε $n >$ είναι και αυτορρίμη μετρή. Το x_0 είναι παραδείγμα
Αν επιλέξουμε $n >$ είναι και τοπική για υπερσύνη (Σημ. $\forall \epsilon > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^m$ $\exists y \in B(x, \epsilon) \cap \mathbb{R}_+^m$ $y \succ x$), τότε θα δείξουμε ότι αυτό μετρονομία $n >$ αυτής και
είναι διαφορετικό.

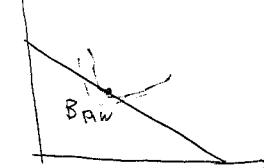
Αν $n >$ είναι i) αυτορρίμη μετρή μετρή

ii) $n >$ είναι αυτός επιδιπλωτός αριθμός (Σημ. $\exists n \in \mathbb{R}_+$:

$\forall x \in \mathbb{R}_+^m$, $x + \lambda n \succ x \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \lambda \neq 0$)

iii) $n >$ αυτορρίμη μετρή και $\forall x \in \mathbb{R}_+^m \exists y \in \mathbb{R}_+^m$: $y \neq x$ και $y \succ x$,

τότε $n >$ είναι τοπική για υπερσύνη.



Άνεργη: i) Έστω $x \in \mathbb{R}_+^m$, $\epsilon > 0$. Αν $(x \in \mathbb{R}_+^m) \cap B(x, \epsilon)$

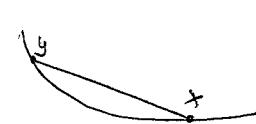
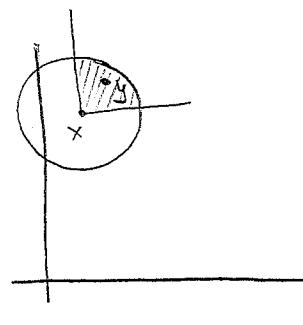
υπάρχει $y \in (x \in \mathbb{R}_+^m) \cap B(x, \epsilon)$, $y \neq x$, τότε $y > x$

Οπότε $y > x$ γιατί $n >$ αυτορρίμη μετρή

ii) $x \in \mathbb{R}_+^m$, $\epsilon > 0$, $y = x + \frac{\epsilon}{2} \frac{n}{\|n\|} \Rightarrow \|y - x\| < \epsilon$, $y > x$

$z = qy + (1-q)x > x \Rightarrow z - x = qy - qx = q(y - x)$

$\|z - x\| = q\|y - x\| \text{ ή } q = \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{\|y - x\|} \Rightarrow \|z - x\| < \epsilon$



Η αυτορρίμη (επιδιπλωτή) Σύνθεσης

≥ Ηρχει στον αριθμόν προσθίνετος υπεραριθμών

$\forall p \in \mathbb{R}_+^m$, $p > 0$ διανομή της w και $\forall w \in \mathbb{R}$, $w > 0$, $\varphi(p, w) = \{x \in B_{p,w}\}$

$x \geq y \quad \forall y \in B_{p,w}\}$. Αν ο υπεραριθμός είναι αρχικός αριθμός $w \in \mathbb{R}_+^m$, τότε

$\forall p > 0$ διανομή της w $w = w(p) = p \cdot w$ ο αρχικός μέτρος του υπεραριθμού,

και $B_w(p) = \{x \in \mathbb{R}_+^m \mid p \cdot x \leq p \cdot w\}$ τότε αυθορμίζεται $\varphi(p) = \{x \in B_w(p) \mid x \geq y$

$\forall y \in B_w(p)\}$

Αν για κάθε (p, w) $\mu: p > 0$ και $w > 0$ (μ για κάθε $p > 0$),

τότε $\varphi(p, w) \neq \emptyset$ (αυτορρίμη το $\varphi(p) \neq \emptyset$) Γεμέστη υποδοχή

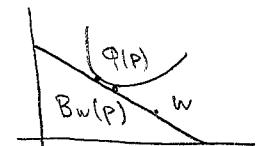
αυτορρίμη Σύνθεση, και αυθορμίζεται για την φ

$(p, w) \longrightarrow \varphi(p, w) \quad \text{και} \quad p \longrightarrow \varphi(p)$

Αν $\varphi(p, w)$ (αυτορρίμη το $\varphi(p)$) είναι μετρονομή, και φ είναι n επιδιπλωτή Σύνθεσης

Αν $n >$ είναι αυτορρίμη μετρή και διανομέσις, τότε $\varphi(p)$ είναι μετρονομή

$\forall p > 0$, δηλαδή υπάρχει n επιδιπλωτή Σύνθεσης.



ΕΛΛΗΝΙΚΑ: Εσεων στην αρχική προσέταξης \Rightarrow είναι λογική, ανεξάρτητη και αυτονόμη προσέταξη. Αν $n \geq 2$ είναι και προσέταξη, τότε στην αντίστοιχη γράφημα είναι ανεξάρτητη.

ΣΟΣ

\Rightarrow Εσεων στην αρχική προσέταξης \Rightarrow είναι αρχική γράφημα $w = (10, 8)$ και στην αρχική προσέταξης \Rightarrow το πρώτο αριθμό της αντίστοιχης γράφημας $u(x,y) = xy$ προστίθεται στην αντίστοιχη γράφημα της προσέταξης w .

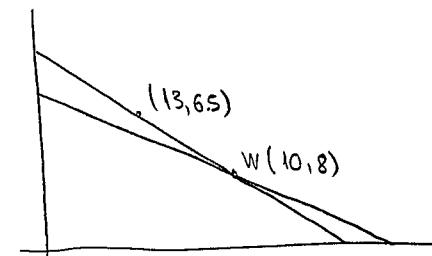
Άλλο: Εσεων $P = (P_1, P_2) \in \mathbb{R}_+^2$, $P > 0$ ($P_1 > 0, P_2 > 0$). Τότε $B_w(P) = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid P_1x + P_2y \leq P_1 \cdot 10 + P_2 \cdot 8\}$. Η αρχική προσέταξη \Rightarrow είναι ανεξάρτητη (επειδή η αρχική προσέταξη), από την οποία προκύπτει το $B_w(P)$. Για να προστίθεται στην αντίστοιχη $B_w(P)$ το αντίστοιχο προστίθετο $u(x,y) = xy$ στην $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ με $P_1x + P_2y \leq 10P_1 + 8P_2$. Επειδή η αρχική προσέταξη είναι αυτονόμη προσέταξη, από την προστίθετη προσέταξη προκύπτει προστίθετη. Αρα ξακούει τη προστίθετη προσέταξη $u(x,y) = xy$ στην $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ με $P_1x + P_2y = 10P_1 + 8P_2 \Leftrightarrow y = \frac{10P_1 + 8P_2 - P_1x}{P_2}$. Αρα ξακούει τη προστίθετη προσέταξη:

Μεγαλούντας την $f(x) = x \left(\frac{10P_1 + 8P_2 - P_1x}{P_2} \right)$, στην $[0 \leq x, y = \frac{10P_1 + 8P_2 - P_1x}{P_2} \geq 0]$ $\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{10P_1 + 8P_2}{P_1}$. Έχουμε $f'(x) = \frac{10P_1 + 8P_2 - P_1x}{P_2} + x \left(-\frac{P_1}{P_2} \right) = \frac{10P_1 + 8P_2 - 2P_1x}{P_2}$. Πρέπει $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{10P_1 + 8P_2}{2P_1}$.

Η f είναι ικανοποιείται για $x = \frac{10P_1 + 8P_2}{2P_1}$. Γι' αυτήν την τιμή του x , ξακούει $y = \frac{10P_1 + 8P_2}{2P_2}$. Αρα $\Phi(P) = \left(\frac{10P_1 + 8P_2}{2P_1}, \frac{10P_1 + 8P_2}{2P_2} \right)$ το αντίστοιχο πρώτο αντίτοιχο $n \geq 2$. Αρα $\Phi(P) = \left(\frac{10P_1 + 8P_2}{2P_1}, \frac{10P_1 + 8P_2}{2P_2} \right)$, $P > 0$ είναι στην αντίστοιχη γράφημα της προσέταξης w .

$$\text{Προσδοκή } \Phi(1,2) = \left(\frac{26}{2}, \frac{26}{4} \right) = (13, 6.5),$$

$$\Phi(3,2) = \left(\frac{46}{6}, \frac{46}{4} \right)$$



Hausur: Σε οιναρία με δύο αριθμούς, καταναλωτής έχει ανδρόνην ρηματισμούς

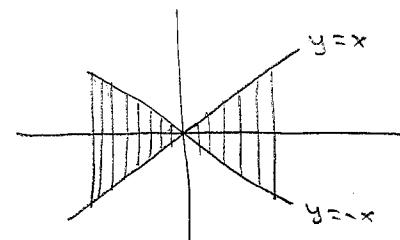
$u(x,y) = x+y$. Προσδιορίζεται την αναπομπή Ιστόν. $\Phi(p)$, $p \in \mathbb{R}_+^2$, $p > 0$ ουν εξέργαστε αν n Φ έχει ανεξή επιλογή (δηλ. αν για όλες $p > 0$ προκύπτει να είναι ίση με $f(p) \in \Phi(p)$ ωστε ν αναπομπή $f(p)$, $p > 0$ να είναι ανεξής)

1) Εάν n ηδειδήν αναλύσιμη $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\Phi(x) = [-x, x] \quad \forall x \in \mathbb{R}$, δηλαδή

$\Phi(1) = [-1, 1]$, $\Phi(2) = [-2, 2]$, $\Phi(0) = 0$. Το γεωμετρικά της Φ είναι το υπεύθυνο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $G(\Phi) = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \in \Phi(x)\}$

Αν από όλες $\Phi(x)$ επιλέγουμε συνολικά το ορθό το οντότητα $f(x)$, εργάζεται παραδίφην αναλύσιμη (αναπομπή) $x \rightarrow f(x)$, δηλαδή είναι παραδίφην της Φ .

Αν επιλέγουμε n f είναι ανεξής, θέτε οτι $n f$ είναι ανεξής επιλογή της Φ ν ή Φ ή n Φ έχει ανεξή επιλογή. Εδώ οι αναπομπές $f(x) = |x|$, $g(x) = 0$, $h(x) = \frac{x}{2}$ είναι ανεξής της Φ .

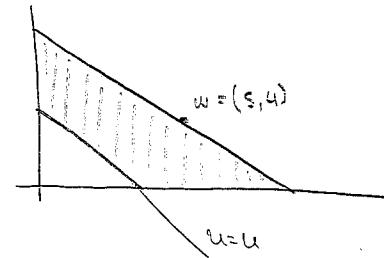


Εργάζεται η πρόβλημα. Εάν $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_+^2$, $p > 0$. Νεγκρονοίκειες την αναπομπή $u(x,y) = x+y$. Οποιο $(x,y) \in B_w(p) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid p_1x + p_2y \leq 5p_1 + 4p_2\}$.

Η u είναι ανεξής και αντηπά παρατημένη, από περιπονοίτικαν οποιας εποιητικές περιοριστικές. Από εργάζεται:

Νεγκρονοίκην $u(x,y) = x+y$ οποιο $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$p_1x + p_2y = 5p_1 + 4p_2 \Leftrightarrow y = \frac{5p_1 + 4p_2 - p_1x}{p_2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{5p_1 + 4p_2}{p_2}$$



Από εργάζεται η πρόβλημα: Νεγκρονοίκητο $f(x) = \frac{p_2 - p_1}{p_2}x + \frac{5p_1 + 4p_2}{p_2}$

οποιο $0 \leq x \leq \frac{5p_1 + 4p_2}{p_1}$. Αν $p_2 - p_1 > 0 \Rightarrow f \uparrow \Rightarrow$ περιπονοίτικη για $x = \frac{5p_1 + 4p_2}{p_1}$

οποτε $y=0$. Αν $p_2 - p_1 = 0 \Rightarrow f \uparrow \Rightarrow$ η f περιπονοίτικη για $x=0 \Rightarrow y = \frac{5p_1 + 4p_2}{p_2}$

Αν $p_2 - p_1 < 0$, η f είναι ορθοδεξή - Από για όλες $x \in [0, \frac{5p_1 + 4p_2}{p_1}]$ περιπονοίτικες

ωστε $f(x) = \frac{5p_1 + 4p_2}{p_2} \frac{p_1 - p_2}{p_1} \frac{g p_1}{p_1} = g$ ωστε $y = \frac{g p_1 - p_1 x}{p_1} = g - x \Rightarrow (x,y) = g$

Από η αναπομπή Ιστόν είναι:

$$\Phi(p) = \begin{cases} \left\{ \left(\frac{5p_1 + 4p_2}{p_1}, 0 \right) \right\} & |p_2 > p_1, \\ \left\{ (x,y) \mid x, y > 0, x + y = g \right\} & |p_2 = p_1, \\ \left\{ (0, \frac{5p_1 + 4p_2}{p_2}) \right\} & |p_2 < p_1 \end{cases}$$

Η. Εφ δεξερα (εξε) ανεξη επιδρομή;

Έστω στη f ανεξης επιδρομή της φ. Τότε $f(p) \in Q(p)$ και f ανεξης. ($f: \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$). Έχουμε στη $f(1, 1 + \frac{1}{n}) \stackrel{P_2 > P_1}{=} \left(\frac{5 \cdot 1 + 4(n + \frac{1}{n})}{1}, 0 \right)$

$$f(1 + \frac{1}{n}, 1) \stackrel{P_2 < P_1}{=} \left(0, \frac{5(1 + \frac{1}{n}) + 4 \cdot 1}{1} \right)$$

Όπως $(1, 1 + \frac{1}{n}) \rightarrow (1, 1)$, $(1 + \frac{1}{n}, 1) \rightarrow (1, 1)$

f ανεξης από $f(1, n + \frac{1}{n}) \rightarrow f(1, 1)$ και $f(1 + \frac{1}{n}, 1) \rightarrow f(1, 1)$

$f(1, n + \frac{1}{n}) \rightarrow (g, 0)$

$f(1 + \frac{1}{n}, 1) \rightarrow (0, g)$

$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow f(1, 1) = (g, 0) = (0, g)$ ΑΔΥΝΑΤΟ

Άρα η f δεν έχει είναι ανεξης στο σημείο $(1, 1)$, ανθεκτικός δεν υπάρχει ανεξης επιδρομής της φ.

Augmented's ανανέωσης αναδρομής

Έστω οικεία με m -αγάδι ($E = \mathbb{R}^m$ χώρος αγαδών, \mathbb{R}_+^m ενδικό ναταν, $E^* = \mathbb{R}^n$ χ. αλιών)

Καθοδήστε στη ϵ -επίπεδη l -ματαδύνων, οπου ο i ματαδύνων είναι αρχικός αγάδι $w_i \in \mathbb{R}_+^m$, $w_i \neq 0$ και οικείας προτίμων \succ_i . Η οικεία εργαζόταν ως εξής:

$$\langle (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), (w_i, \succ_i) \mid i=1, \dots, l \rangle$$

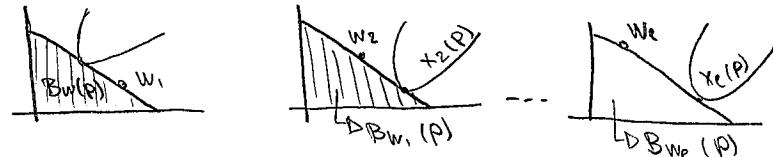
Καθοδήστε στη οι οικείες προτίμων \succ_i των ματαδύνων είναι ανεξης και στη γενική P , υπάρχει η αναδρομής στάσης $x_i(p)$ των i -ματαδύνων για να δει :

(Αν οι οικ. προτ. είναι αυστηρής μητρώς, οκ!)

$w=w_1+w_2+\dots+w_l$ το συνολικό αγάδι της οικείας. Καθοδήστε στην παραδοσιακή οργάνωση $t=0$ εξεργαζόμενη και δείχνετε να μετανιώνεται την αναπληρωματική την ματαδύνων την αναβάνειν ρητ. οργάνων $t=1$ για τα διαφορά ανανεώσαται τύπων $P=(p_1, \dots, p_m) \gg 0$

(Την ρητ. οργάνων $t=1$ οι ναταν. δα αναβάνεται τα αγάδια των ανανεώσαται της προτίμων των).

Έστω $q = (p_1, p_2, \dots, p_l)$ θετ. αλιών



Τότε $x_1(p) + x_2(p) + \dots + x_l(p)$ το ίντεντέντο, $w=w_1+w_2+\dots+w_l$ το προστεττόμενο αγάδι. Η αναδρομή $J(p) = \sum_{i=1}^l x_i(p) - w$, $p \gg 0$ αναδρομής αναδρομής μεταβαλλόμενας στάσης. Καθοδήστε $p > 0$ ώστε $J(p) = 0$

Αν υπάρχει $p \gg 0$: $J(p)=0$, τότε ιστος στην αγάδια υπάρχει λεσχήσαται και η P είναι τυπικής μεταβαλλόμενης

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΦΥΛΛΟ 2

Άσκηση ~~0.0.1.~~. Προσδιορίστε το σύνολο προϋπολογισμού $B_\omega(p) = \{x \in X \mid p \cdot x \leq p \cdot \omega\}$ καταναλωτή με αρχικό αγαθό ω στις παρακάτω περιπτώσεις:

(1) Σε οικονομία με δύο αγαθά, $X = \mathbb{R}_+^2$, $\omega = (5, 4)$ και (i) $p = (1, 2)$, (ii) $p = (3, 2)$, (iii) $p = (0, 5)$.

(2) Σε οικονομία με τρία αγαθά, $X = \mathbb{R}_+^3$, $\omega = (4, 2, 3)$ και $p = (2, 3, 1)$.

Άσκηση ~~0.0.2.~~. Σε οικονομία με δύο αγαθά, προσδιορίστε διάνυσμα τιμών που στηρίζει τη σχέση προτίμησης του \mathbb{R}_+^2 που ορίζεται από τη συνάρτηση χρησιμότητας $u(x, y) = x^2y^3$. (Να αναφέρετε το αντίστοιχο Θεώρημα και να δείξετε ότι ισχύουν οι υποθέσεις του.)

Άσκηση ~~0.0.3.~~. Έστω οικονομία με δύο αγαθά και έναν καταναλωτή αρχικό αγαθό $\omega = (5, 3)$. Αν $p = (0, 4)$ είναι το διάνυσμα τιμών, δείξτε ότι η σχέση προτίμησης που ορίζεται από τη συνάρτηση χρησιμότητας $u(x, y) = xy$ δεν μεγιστοποιείται στο σύνολο προϋπολογισμού $B_\omega(p)$ του καταναλωτή. Ποια από τις υποθέσεις του αντίστοιχου θεωρήματος δεν ικανοποιείται;

Άσκηση ~~0.0.4.~~. Έστω οικονομία με δύο αγαθά και έναν καταναλωτή με συνάρτηση χρησιμότητας $u(x, y) = xy^2$ και αρχικό αγαθό $\omega = (10, 3)$. Προσδιορίστε τη συνάρτηση ζήτησης $\phi(p)$, $p >> 0$. Προσδιορίστε το ζητούμενο αγαθό όταν το διάνυσμα τιμών είναι $p = (3, 4)$.

Άσκηση ~~0.0.5.~~. Σε οικονομία με δύο αγαθά και έναν καταναλωτή με συνάρτηση χρησιμότητας $u(x, y) = 2x + y$ και αρχικό αγαθό $\omega = (4, 3)$ προσδιορίστε την αντιστοιχία ζήτησης

$$\phi(p), p \in \mathbb{R}^2, p >> 0$$

και εξετάστε αν έχει συνεχή επιλογή.

Άσκηση ~~0.0.6.~~. (i) Έστω X γραμμικός χώρος και $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση και έστω $A \subseteq X$ κυρτό. Αν F είναι το σύνολο

των σημείων του A στα οποία μεγιστοποιείται η f και $F \neq \emptyset$, δείξτε ότι το F είναι exteme face του A , δηλαδή ισχύει:

$$x, y, z \in A, x = \lambda y + (1 - \lambda)z, \lambda \in (0, 1), x \in F \implies y, z \in F.$$

(ii) Εφαρμογή: Σε οικονομία ανταλλαγής με τρία αγαθά και έναν καταναλωτή με συνάρτηση χρησιμότητας $u(x, y, z) = 4x + 3y + 5z$, προσδιορίστε τα σημεία του συνόλου προϋπολογισμού $B_{p,w}$ στα οποία η u παίρνει μέγιστη τιμή όταν (i) $p = (2, 3, 1)$, $w = 10$, (ii) $p = (2, 2, 5)$, $w = 10$ και (iii) $p = (4, 3, 5)$, $w = 10$.

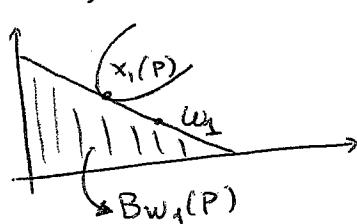
12/2/2014

Οικονομικά Μαθηματικά

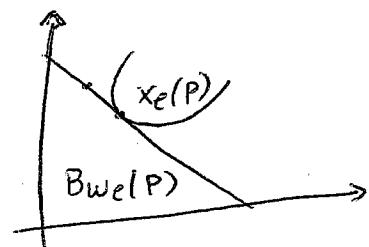
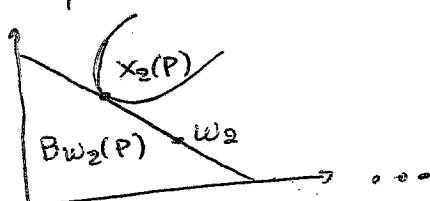
ΘΕΩΡΗΜΑ (ARROW + DEBICU -)
 Έστω οικονομία ανταγωνιστής $E = \mathbb{R}^m$ (η αγαθά) χώρος αγαθών,
 \mathbb{R}^m χώρος τιμών \mathbb{R}^n σε σύνολο κατανάλωσης. Έχουμε ένα καταναλωτής
 που οι κατανάλωσης είναι αρχικό αγαθό $w \in \mathbb{R}_+^m$, $w_i \neq 0$ και
 σχέση προτίμησης \succ .

Αν οι σχέσεις προτίμησης είναι συνεπεις, προτότοπες και ανοτρέπια κυρτές
 και το συνολικό αγαθό $w = w_1 + w_2 + \dots + w_r$ είναι ανοτρέπια θετική (κασσί-
 να), το w είναι εσωτερικό σημείο του \mathbb{R}_+^m , τότε υπάρχει ένα διάνυσμα
 παραπομπής τιμών $P > 0$ ώστε $f(P) = 0$, δηλ. Είναι η αντανακλαση της αγοράς.

Δηλαδή, υπάρχει διάνυσμα τιμών P



Ιες καταναλωτής



$$f(P) = \sum_{i=1}^r x_i(P) - w = 0 \quad \text{συνάρτημα υπερβαθμούς στην μεταβλητή } P$$

ΘΕΩΡΙΑ ΤΑΙΓΝΙΩΝ

Θερετικές: Borel, von Neumann

1920-1928

1928 von Neumann Min Max Th. (αντανακλαση σε παιχνίδια μιδενικού αθροισματος)

1950-1954 J. Nash

To διάγραμμα των φυλακτορέων

		π_2	
		A	K
π_1	A	(-2, -2)	(-25, 0)
	K	(0, -25)	(-15, -15)

Κατηγορίες των αλλοίων

Av παιχνίδια π_2 αποφασίζει A, τότε $\pi_1 = K$
 Av $\pi_2 = K$, τότε $\pi_1 \rightarrow K$

Παραδείγματα

Υποθέσουμε ότι έχουμε δύο παικτές, τους π_1 και π_2 . Ο π_1 έχει σύνολο στρατηγικών (επιλογών, αποφάσεων) $S_1 = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$. Ο π_2 έχει ^{τετεραριθμό} σύνολο στρατηγικών $S_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$. Την επόμενη χρονική στιγμή (την χρον. στιγμή 1) ο π_1 επιλέγει το σ_i και ο π_2 το w_j . Ωπότε, η απόδοση για τον π_1 είναι $u_1(\sigma_i, w_j) \in \mathbb{R}$ και η $u_2(\sigma_i, w_j) \in \mathbb{R}$ για τον π_2 .

Διαβάστε ξακουστές έξοδους:

$S_1 \times S_2$ το σύνολο των πραγματικών συνδυασμών καθε στρατήγου (σ_i, w_j) του $S_1 \times S_2$ είναι ένα διάνυσμα στρατηγικής ή ένα διάνυσμα στρατηγικών συνδυασμών.

Η συνάρτηση $u_1: S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση απόδοσης του π_1 και η συνάρτηση $u_2: S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση απόδοσης του π_2 . (u_1, u_2 είναι χυμοτές και στους δύο παικτές.)

$$\text{Άρ} \quad u_1(\sigma_i, w_j) = a_{ij} \mid i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$$

$$u_2(\sigma_i, w_j) = b_{ij} \mid i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$$

Τότε οι πίνακες $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ είναι οι πίνακες απόδοσης των παιχνιδιών.

Παραδείγματα: Άρ $S_1 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ $S_2 = \{w_1, w_2\}$ - - -

$$\text{κατ} \quad A = \begin{array}{c|cc|c} & w_1 & w_2 & \\ \hline \sigma_1 & 1 & 2 & \\ \sigma_2 & 2 & 1 & \\ \sigma_3 & 3 & 0 & \end{array} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2(\sigma_1, w_1) = 1 \quad u_2(\sigma_1, w_2) = 1$$

$$u_1(\sigma_1, w_2) = 2 \quad u_2(\sigma_1, w_2) = 1$$

⋮

⋮

Επίσης, το παραπόνων παρήγα μπορεί να παρασταθεί ως πίνακας δύο εξόδων

	w_1	w_2	\dots	w_m
σ_1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})		
σ_2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})		
\vdots				
σ_m				

Ισορροπία κατά Nash:

Το διάνομα στρατηγής (σ_i, w_j) (όσο παιχνίδι που αρέσει προηγουμένως) είναι ισορροπία κατά Nash, αν ρέχουν

$$u_2(\sigma_i, w_j) \geq u_2(\sigma_i, w_k) \quad \forall k=1, \dots, m \quad k \neq j$$

$$\text{και } u_1(\sigma_i, w_j) \geq u_1(\sigma_k, w_j) \quad \forall k=1, \dots, n \quad k \neq i$$

	A	K
A	(-2, -2)	(-25, 0)
K	(0, -25)	(-15, -15)

Έσο διάγραμμα των φυλακοφένεν

Το διάνομα στρατηγής (A, K) είναι ισορροπία κατά Nash. Το (A, A) δεν είναι ισορροπία κατά Nash, γιατί

$$u_1(A, A) = -2 \quad \text{και} \quad u_1(K, A) = 0$$

$$u_1(K, K) = -15, \quad u_1(A, K) = -25$$

Η μάχη των φύλων

	O	K	T
O	(1, 10)	(0, 0)	
A		(0, 0)	(10, 1)
T			

ταυτόποια

Τα $(0, 0)$ και (T, T) είναι ισορροπία κατά Nash.

Η μέθοδος των κυριαρχημένων στρατηγών

Άλλες δια n στρατηγής σ_i κυριαρχεί της στρατηγής σ_j για τον παίκτη i αν $u_1(\sigma_i, w_k) \geq u_1(\sigma_j, w_k) \quad \forall k=1, \dots, m$

Άλλες δια n στρατηγής σ_i κυριαρχεί αντριά της στρατηγής σ_j αν $u_1(\sigma_i, w_k) > u_1(\sigma_j, w_k) \quad \forall k=1, \dots, m$

Analogous αριθμούς έχουμε για τον παίκτη 2

Με τη μέθοδο των αντριών κυριαρχημένων στρατηγήκων μπορούμε να κατατίθουμε στην πλάτη του παιχνιδιού ή σε "μικρότερα" παιχνίδια.

Παραδείγματα:

		π_2		Γ
		A	B	
		1	(2,1) (3,4)	(4,1)
π_3	2	(1,3)	(1,2)	(4,1)
	3	(1,3)	(3,5)	(6,4)

Για τον παιχνίδι Γ , η στρατηγική B κυριαρχεί ανωτέρα της Γ .
Άρα έχουμε το παιχνίδι:

		π_2	
		A	B
		1	(2,1) (2,4)
π_1	2	(1,3)	(1,2)
	3	(1,3)	(3,5)

Στο νέο παιχνίδι, για τον π_1 , η B κυριαρχεί ανωτέρα της π_2 .

		π_2	
		A	B
		1	(2,1) (2,4)
π_1	3	(1,3)	(3,5)

Για το π_2 , η B κυριαρχεί ανωτέρα της A , άρα:

		π_2	
		B	
		1	(2,4)
π_1	3	(3,5)	

Άρα, το διάνυσμα στρατηγικής $(3, B)$ θα επιλέγεται στην παρούσα ατίτους παιχνίδη. Το διάνυσμα αυτό,

σημ. το $(3, B)$, λέγεται πών του παιχνιδιού.

Άνταν

		π_2	
		B	
		1	(2,4)
π_1	3	(2,5)	

Θα ήταν και τα σύνο $((1, B), (3, B))$ λογοποιία κατά Nash

Πληγή κατά την πομπή (σερ. 228)

Έχουμε n φάσεις την αριθμός ws 1, 2, ..., n. Καθε φάσης έχει ένα αντίδοτο ενδιάμεση (στρατηγική) σε όλες απότελεσματα και νιώνεται.

		k		
		0	T	
		0	(1, 10)	(0, 0)
		T	(0, 0)	(10, 1)

To διαν. στρατηγ. (0, 0) και (T, T)

Είναι ισορροπίες κατά Nash

Πλεόνασμα της εργασίας

Ημέρα Τετάρτη 26/2

$$\text{Άριθμοι } u_1(0, 0) = 1 > u_1(T, 0) = 0 \\ u_2(0, 0) = 10 > u_2(0, T) = 0 \quad \Rightarrow (0, 0) \text{ Nash}$$

To πληγή κατά την πομπή

		2		
		A	B	
		A	(1, 3)	(2, 1)
		B	(2, 1)	(1, 2)

Σε πληγή ισορροπία κατά Nash γίνεται διαν. στρατηγ.:

$$(A, A): 1 = u_1(A, A) < u_1(B, A) = 2$$

$$(B, A): 1 = u_2(B, A) < u_2(B, B) = 2$$

Έχουμε 2 μεταγόρευτες πληγές

- Πληγή κατάρρεις στρατηγής (η στρατηγή πληγή)
- " μετρήσις "

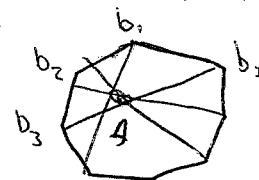
• Στη πληγή κατάρρεις στρατηγής, όλες οι φάσεις προσέρχονται στην πληγή στην οποία έχει επιλέγει η μετρήσιμη πληγή και η μετρήσιμη πληγή είναι αποφασιστική για την πληγή στην οποία έχει επιλέγει η μετρήσιμη πληγή.

• Στη πληγή μετρήσιμη στρατηγής, όλες οι φάσεις προσέρχονται με είναι διαδικούμενη πληγή στην οποία έχει επιλέγει η μετρήσιμη πληγή και η μετρήσιμη πληγή είναι αποφασιστική για την πληγή στην οποία έχει επιλέγει η μετρήσιμη πληγή.

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $A \neq \emptyset$. Το A είναι μετρέα πολύτερο, αν $\exists b_1, b_2, \dots, b_n \in A$ ώστε $A = \{x = \sum i_i b_i \mid i_i \geq 0 \text{ και } \sum i_i = 1\}$

Το έστω A είναι μετρέα πολύτερο και

αποτελεί (extreme) σημείο του A



$\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ είναι το μετρέα του

zois gatz

Av A elvan μέρια πολυτόνο, όπου $x \in A$ elvan μέρια συμβασίας των μορφών b_1, \dots, b_n των A αλλά ο μέρος συμβασίας δεν είναι κανονικό παραδίνος. Στο σχήμα $x = \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_4$ ή $x = \frac{1}{3}b_1 + \frac{4}{5}b_2$ ή $x = \frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{4}b_2 + \frac{4}{10}b_2 + \frac{1}{10}b_1$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{4}{10} = 1$

Θεώρημα: Ηδεικνύεται πολυτόνο των \mathbb{R}^m είναι αριθμογές (δηλ. μέρος νευρώνων)

Επίρρεψη: Εσεν A μέρια πολυτόνο των \mathbb{R}^m δε μορφά τα μέρια b_1, b_2, \dots, b_n και στον $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \in A$ ην εστω $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ γράφιμη. Τότε έχετε:

a) Οι περισσότερες προσδοτες είναι λεπτομέρειες:

- i) Η n f περιστροφές στο A οποιαν x
- ii) $f(x) = \max \{f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n)\}$
- iii) $f(x) > f(b_i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$

b) Av λογικές που αποτελούνται από i), ii), iii) ην $S(x) = \{i = 1, \dots, n \mid \lambda_i > 0\}$ (ο ρυθμός του x) και $m(x) = \{i = 1, \dots, n \mid f(x) = f(b_i)\}$ έχετε στο $S(x) \subseteq m(x)$, δηλαδή το x βρίσκεται στην "έναρξη" των A παραπομπές και τις μορφές που περιστροφές στην f.

Άρα στο (a) έχετε στη n f περιστροφές στον οριζόντιος του A. Το περιστρέφει την f στο A προσδιορίζεται από περιστροφή την f των μορφών του A. δηλαδή $\max_{y \in A} f(y) = \max_{y \in A} \{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$

Mesoplui xiros

Mesoplui evdiptron: Eanw $E \neq \emptyset$ evnodo. Mta anekdunon $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ pe iδicences.

- $d(x,y) > 0 \quad \forall x,y \in E$ van $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in E$

- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Aphidherou mesoplui oto E, van to lewgos (E, d) mespluios xiros.

If mesoplui d to E opiba oto E filia tenologia ws eñis: Eanw $A \subseteq E, A \neq \emptyset$ aphidherou evnuto oto E av $\forall x \in A, \exists B(x,\rho) \subseteq A$, onw $B(x,\rho) = \{y \in E : d(x,y) < \rho\}, \rho > 0$ evai n evnuto funda to $x \cdot E$, pe uέrpo x van autwro $\rho > 0$.

H enaxofhem tenologia

Eanw (E, d) mesplui xiros, $X \subseteq E, X \neq \emptyset$. O nrepioplopos tns mesplui d oto unoonodo $x \in X$, dnd n anekdunon $d_x = d|_{X \times X}: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ elvai mesplui van $\forall x,y \in X : d_x(x,y) = d(x,y)$. Opibafe $B_x(x,\rho) = \{y \in X : d(x,y) < \rho\}$ n mesplui to X , pe uέrpo x van autwra ρ . If enaxofhem tenologia oto X , opiba filia tenologia oto X , nro tns aphidherou "enaxofhem tenologia oto X ". Tlapatmpafe oto eva $A \subseteq X, A \neq \emptyset$ elvai evnuto oto X av $\forall x \in A \exists B_x(x,\rho) \subseteq A$.

$$B_x(x,\rho) = B(x,\rho) \cap X$$

Nw A evnuto oto X , $(X \subseteq E, X \neq \emptyset) \not\Rightarrow A$ evnuto oto E .

Xiros pe vóspa:

Eanw $E \times \mathbb{R}$. Mesplui va opibafe mesplui d oto E ws eñis - Opibafe $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}, \mu \in d(x,y) = \|x-y\|$. Eanw $X \subseteq E, X \neq \emptyset$ If enaxofhem tenologia to X , opibafe ws eñis: Fia $x,y \in X$, opibafe $d_x(x,y) = \|x-y\| = d(x,y)$ van opiba pe npiu opibafe to $B(x,\rho) = \{y \in E : \|x-y\| < \rho\}$ van $B_x(x,\rho) = \{y \in X : \|x-y\| < \rho\} = B(x,\rho) \cap X$

Ωtwnika: Eanw $E \neq \emptyset$ van $X \subseteq E, X \neq \emptyset$. Eanw $A \subseteq X$. Tore:

- To A elvai evnuto unoonodo to $\mu \cdot x \cdot X \Leftrightarrow \exists B \subseteq E$ evnuto, pe $A = B \cap X$
- To A elvai uέrto unoonodo to $X \Leftrightarrow \exists B \subseteq E$ alwod, $\mu \in A = B \cap X$

Άνατολή:

i) " \Rightarrow " Εσεν Α ανοικτό υποσύνολο του X. Επομένως $\forall x \in A, \exists B_x(x, \rho) \subseteq A$. Επομένως $A = \bigcup_{x \in A} B_x(x, \rho)$. Οπίστρεψε $B = \bigcup_{x \in A} B_x(x, \rho)$. Το $B \neq \emptyset$, ανοικτό υποσύνολο του E, επειδή είναι αυτοί οι ίδιοι ένωση ανοικτών υποσυνόλων του E.

Παρατηρήσεις: $A = \bigcup_{x \in A} B_x(x, \rho) = \bigcup_{x \in A} B_x(x, \rho) \cap X = B \cap X$

Διεύθυνση: Αυτοί οι ίδιοι ένωση ανοικτών είναι ανοικτό υποσύλο
Πεπερασμένη τούτη ανοικτής είναι ανοικτό υποσύλο
Παρατηρήσεις: Η ανοικτότητα του αυτοτρόφου

" \Leftarrow " Καθορίστε ότι $\exists B \subseteq E$ ανοικτό με $A = B \cap X$. Οδός Α ανοικτό υποσύλο του X. Δηλ. Οδός $\forall x \in A \exists B_x(x, \rho) \subseteq A$. Εσεν $x \in A$. Επειδή $x \in A = B \cap X \Rightarrow \Rightarrow x \in B$ και $x \in X$. Επειδή $x \in B$ και $B \subseteq E$ ανοικτό $\Rightarrow \exists B(x, \rho) \subseteq B$ (2). $B_x(x, \rho) = B(x, \rho) \cap X \stackrel{(2)}{\subseteq} B \cap X = A$. Επομένως $\forall x \in A, \exists B_x(x, \rho) \subseteq A$. Άρα Α ανοικτό όσον X.

ii) $A \subseteq X$ υπεύθυνο $\Rightarrow A^c = X \setminus A$ ανοικτό υποσύλο του X. Οποτε επαρκεί να παρατηρήσουμε ότι $(A^c)^c = A$.

Ευθύγραμμη μετρητής χώρας

Ευθ. μ.χ. αναφέρεται σε διέγραμμα (X, d) , οπου $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $X \neq \emptyset$ και d είναι η μετρητής που αναφέρεται στην επιφάνεια υπότιτρα της χώρας \mathbb{R}^m .

Κανόνισμα: Στα $x \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Στα $x, y \in \mathbb{R}^m$ $d(x, y) = \|x - y\|_2$.

Παρατηρήσεις: Κατείχε υπότιτρα στη χώρα \mathbb{R}^m είναι λογισμικό με την επιφάνεια υπότιτρα $\|\cdot\|_2$. Οι λαζαρίδες της $\|\cdot\|_2$ είναι μετρητής χώρας στην \mathbb{R}^m , τοτε $\exists a, b > 0$ ώστε $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $a \cdot \|x\| \leq \|x\|_2 \leq b \cdot \|x\|$.

Ωτωντήση: Εσεν o μ.χ. $X \subseteq \mathbb{R}^m$. Αν $K \subseteq X$, τοτε ΤΕΕΙ:

- To συνόλο K είναι υπεύθυνο και ορθόχρωμο υποσύλο του X
- Κατείχε ανοικτότητα $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ του K. Έχει συγχρίνεται στην ανοικτότητα του K.

Άνατολή: i) \Rightarrow ii) Εσεν K υπεύθυνο και ορθόχρωμο υποσύλο του X. Εσεν $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ με ανοικτότητα του K, με $x_n = (x_n(1), \dots, x_n(m))$, $n \in \mathbb{N}$. Η ανοικτότητα της πρώτης συντεταγμένης της $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, δηλαδή n $\{x_n(1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ορθόχρωμη (επειδή K

(2)

φραγμένο) αποδεικτά των \mathbb{R}^m , όπου έχει συμβινείσα να πάρει διάσταση.

Θεωρήστε την να πάρει διάσταση $\{x_{kn}\}_n$ της $\{x_n\}$ με $x_{kn} = \{x_{kn}(1), \dots, x_{kn}(m)\}$ και $\{x_{kn}(i)\}$ να είναι συγκίνεια. Αν προσωρινούμε στην $\{x_{kn}\}$ την συντεταγμένη της $\{x_n\}$, τότε θα έχει να πάρει διάσταση την $\{x_n\}$ και συγκίνεια. Τότε θα έχει να πάρει διάσταση $\{x_{kn}\}_n$ της $\{x_n\}$ με την $\|x_n - x_{kn}\| \rightarrow 0$ για συγκίνεια. Επομένως, αν προσωρινούμε $y_n(i) \rightarrow y(i)$ $\forall i = 1, 2, \dots, m$, δηλ. $y_n = (y_n(1), y_n(2), \dots, y_n(m))$, με $y_n(1) \rightarrow y(1)$, $y_n(2) \rightarrow y(2), \dots, y_n(m) \rightarrow y(m)$.

Αν απόβοτοφε με $y = (y(1), y(2), \dots, y(m))$, τότε $y_n \rightarrow y$. Πλέον, επειδή $y_n(i) \rightarrow y(i)$, $\forall i = 1, \dots, m$ θέτουμε $\delta > 0$, $\exists n_0 = n_0(k) \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|y_n(i) - y(i)| < \delta \quad \forall i = 1, \dots, m \Rightarrow \sup \{ |y_n(i) - y(i)| : i = 1, 2, \dots, m \} < \delta \Rightarrow \|y_n - y\|_\infty$

Επειδή $\{y_n\}_n \subseteq K$, $y_n \rightarrow y$ και K κλειστό $\Rightarrow y \in K$

Άρα $\forall \{x_n\}_n \subseteq K$, \exists να πάρει διάσταση $\{y_n\}_n$ της $\{x_n\}$ με $y_n \rightarrow y \in K$ να πάρει διάσταση την K έχει συγκίνεια να πάρει διάσταση την K . Οδός K κλειστό και φραγμένο.

Κ λειστός αν:
 $\forall \{x_n\} \subseteq K, \mu$
 $x_n \rightarrow x \in E \Rightarrow x \in K$

Προφανώς K κλειστό. Πρόχθει, έστω $\{x_n\}$ αποδεικτά την K , με $x_n \rightarrow x$. Οδός $x \in K$ γιατί $\{x_n\}$ να πάρει διάσταση της $\{x_n\}$ τ.ω. $x_n \rightarrow x \in K$. Οδός K φραγμένο. Εστω ότι δεν είναι. Τότε θα πάρει διάσταση $\{x_n\}_n \subseteq K$, με $\|x_n\| > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Άρα την να πάρει διάσταση $\{x_n\}_n$ της $\{x_n\}$, με $x_n \rightarrow x \in K$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα K φραγμένο.

Συντομεύσεις

Έστω (X, d) μετρητός χώρας. Ο μετρητός χώρας X αναφέρεται ως συντομεύση αν υπάρχει να πάρει διάσταση X έχει να πάρει διάσταση την X .

Ορισμός: Έστω X β.γ. $\forall i \in I$ και $A_i \subseteq X, \forall i \in I$, $I \neq \emptyset$ αναρροφ. \exists συνοχέες $(A_i)_{i \in I}$

τέτοιας ανοιχτή καλήγυν της X αν $A_i \subseteq X$ ανοιχτό, $\forall i \in I$ και $\bigcup_{i \in I} A_i = X$ ($X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq X$)

• Άρα συνοχέες $(A_i)_{i \in I}$ είναι ανοιχτή καλήγυν της X , τότε αν $\exists J \subseteq I$, J πεντεροφ. $\mu \bigcup_{j \in J} A_j = X$, τότε n συνοχέες $(A_j)_{j \in J}$ αναφέρεται πεντεροφέν ανοιχτή καλήγυν της X

την ανατοπή των $(A_i)_{i \in I}$. (Ισοδυναμή, γεγονότης αν n ανοιχτή καλήγυν $(A_i)_{i \in I}$

Έχει πεντεραφέν υποκάλυψη

Θεωρία: Εστι X κ. μ. ρ. TEEI :

- Ο X είναι αυτομάτης
- Κάθε ανατούμενη γέλιψη του X είναι πεντεραφέν υποκάλυψη ($\exists i. \forall (A_i)_{i \in I}, \mu A_i \subseteq X$ ανατούμενη $\forall A_i = X$, εντούτοις $\exists J \subseteq I, J$ πεντεραφέν, $\mu \forall_{j \in J} A_j = X$)

Ιδιότητα Πεντεραφένων Τοπών (INT)

Γενικό: Μια οικογένεια συνόρων έχει την INT αν κάθε πεντεραφέν υποκάλυψη είναι μη κενή τοπή.

Έστι X κ. μ. ρ. Εστι $B_i \subseteq X, \forall i \in I, I \neq \emptyset$ συνόρων. Η οικογένεια $(B_i)_{i \in I}$ έχει την (INT) αν: $\forall J \subseteq I, J$ πεντεραφέν, \exists κάπερο $\bigcap_{j \in J} B_j \neq \emptyset$

Θεωρία: Έστι X . κ. μ. ρ. TEEI :

- Ο X είναι αυτομάτης
- Κάθε οικογένεια αγενούς υποκάλυψης του X , με την INT έχει μη κενή τοπή. ($\forall (F_i)_{i \in I}, F_i \subseteq X$ αγενός $\forall i \in I, \mu$ την ιδιότητα αυτή $\forall j \in I, J$ πεντεραφέν, $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$, εντούτοις $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$)

Αποδήμηση:

i) \Rightarrow ii) Εστι $(F_i)_{i \in I}, F_i \subseteq X$ αγενός $\forall i \in I, \mu$ INT, δηλαδή $\forall J \subseteq I, J$ πεντεραφένεις $\bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset$ (Ισοδύναμη, αν ηδη αποτελεσματικός, εκτός αυτής $\bigcup_{j \in J} F_j^c \neq X$). (I)

Θετικό $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$, καθόταν $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i \in I} F_i^c = X$. Η οικογένεια $(F_i^c)_{i \in I}$

είναι ανατούμενη γέλιψη του X . Πρόσημη $F_i^c = X \setminus F_i$ ανατούμενη υποκάλυψη του $X, \forall i \in I$ αν $\bigcup_{i \in I} F_i^c = X$). Επειδή X αυτομάτης $\Rightarrow \exists J \subseteq I, J$ πεντεραφέν, $\mu \forall_{j \in J} F_j^c = X$ ΑΤΟΠΟ ανά (I)

Άρα $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$

ii) \Rightarrow i) Εστι $(A_i)_{i \in I}$ ανατούμενη γέλιψη του X , δηλαδή $A_i \subseteq X$ ανατούμενη $\forall i \in I \wedge \bigcup_{i \in I} A_i = X$

Εστι $\forall J$ πεντεραφέν υποκάλυψη του X , δηλ. $\forall J \subseteq I, J$ πεντεραφέν

$\bigcup_{j \in J} A_j \neq X \Rightarrow \bigcap_{j \in J} A_j^c \neq \emptyset$ (*) Επομένως η οικογένεια $(A_i^c)_{i \in I}$ είναι οικογένεια αγενούς γέλιψης του X (αφού $A_i^c = X \setminus A_i$ α.ν. υποκάλυψη του $X, \forall i \in I$), που είναι την INT από (I)

Άρα την γενικότερη έκπληξη $\bigcap_{i \in I} A_i^c \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \neq X$. ΑΤΟΠΟ επειδή $(A_i)_{i \in I}$ είναι

ανατούμενη γέλιψη του X . Άρα $\exists J \subseteq I, J$ πεντεραφέν, $\mu \bigcup_{j \in J} A_j = X$, αφού X αυτομάτης

5/2/2014

Οικονομική Μαθηματική

Linearneiakai Karai Nash

Υποθέτουμε ότι η παραγωγή διαιτά την παραγωγή

ο 1^{ος} παίκτης έχει μια επιλογή

ο 2^{ος} - - - m₂

:

ο m^{ος} m_n επιλογή

Το παραγόμενο είναι λεκίσ εξαρτητικό

(οι παίκτες παίζουν με συντονισμό)

Το σύνολο των εξαρτητικών που οι παίκτες παίζουν είναι

$$\text{simplex } \Delta_m = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^m \mid \sum_i x_i = 1 \right\}$$

Το σύνολο επιλογών που η η παραγωγή είναι Δ_{mn} = {x ∈ R₊^{mn} | ∑_{i=1}^m x_i = 1}

Το S = Δ_{m₁} × Δ_{m₂} × ... × Δ_{m_n} οπότε είναι

(διανυσματικό) εξαρτητικό

Παραδείγματα

3 παίκτες

1^{ος} 2 επιλογές

2^{ος} 3 επιλογές

3^{ος} 2 επιλογές

$$S = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \Delta_3 \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^7$$

$$\text{οπότε } x = ((1,0), (1/5, 2/5, 2/5), (1/3, 2/3))$$

είναι διάνυσμα εξαρτητικό

το S είναι επιλογές υπόσεις του R⁷.

To ēiūojo slav. ēparchnikiu s sival supayés uog.
zau $\mathbb{R}^{m_1 \times \dots \times m_n}$

Opiqós

1o Slav. ēparchnikis $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S$
eival 16opponia kai Nash av yia kies i 16x6i
 $u_i(x_1, \dots, x_n) \geq u_i(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad \forall t \in \mathbb{D}_{m_i}$
fia kai i unipxi gupuznha $u_i : S \rightarrow \mathbb{R}$
wzce $u_i(x)$ n arod. zau slav. ēparchnikis $x \in S$
yia zau naikn i wzce
 $u_i(x_1, \dots, x_{i-1}, t + (1-\lambda)t', x_{i+1}, \dots, x_n) =$
 $\lambda u_i(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) + (1-\lambda)u_i(x_1, \dots, x_{i-1}, t', x_{i+1}, \dots, x_n)$
 $\forall \lambda \in (0, 1)$ kai $\forall t, t' \in \mathbb{D}_{m_i}$.

H gupuznha u_i eival ypatiūn ws npos znu i-fazabgnh
zau x .

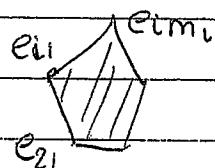
Xpnsitonalibje zau gupuznha

$$x \in S \quad t_i \in \mathbb{D}_{m_i}$$

$$(x, t_i) := \underset{\text{sup}}{(x_1, \dots, x_{i-1}, t_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}$$

$x \in S$ 16op kai Nash av
 $u_i(x) \geq u_i(x, t_i) \quad \forall t_i \in \mathbb{D}_{m_i}$

H u_i eival ypatiūn gupuznha zau \mathbb{R}^{m_i} , apal exoufe
 $\max_{t \in \mathbb{D}_{m_i}} u_i(x, t) = \max \{u_i(x, e_{i1}), \dots, u_i(x, e_{i, m_i})\}$



$$e_{i1} = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m_i}$$

To διάνυστοι σημαντικοί $x \in S$ είναι λεπτομέρια κατά Nash αν για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ έχει

$$u_i(x) = \max_{t \in \Delta m_i} u_i(x, t) = \max \{u_i(x, e_1), \dots, u_i(x, e_{m_i})\}$$

Θ. (Brouwer 1912)

Αν $K \subseteq \mathbb{R}^m$, συναρτήσεις και κυρώσ

και $f: K \rightarrow K$ ευνεχής,

τότε η f έχει τουλ. είναι σταθερό αντίστοιχο.

Άρω. $\exists x \in K : x = f(x)$

Anja Sperner

Πειραματικά

Καθε παγκόσμιο λεκάνης στρογγυλής (δην ως παραλίων)

έχει λεπτομέρια κατά Nash

Anōδειγμ

Για κάθε $x = (x_1, \dots, x_n) \in S$ $\forall i, j$

$$\varphi_{ij}(x) = \max \{0, u_i(x, e_{ij}) - u_i(x)\}$$

$$u_i(x, e_{ij}) = u_i(x_1, \dots, x_{i-1}, e_{ij}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Έχουμε: x λεπτομέρια κατά Nash αν και μόνο αν

$$\varphi_{ij}(x) = 0 \quad \forall i, j$$

Τη πραγματικά αν $\varphi_{ij}(x) \leq 0 \forall i, j \rightarrow u_i(x, e_{ij}) \leq u_i(x) \forall i, j$

$$u_i(x) \leq \max \{u_i(x, e_1), \dots, u_i(x, e_{m_i})\}$$

$$\Rightarrow u_i(x) = \max \{u_i(x, e_1), \dots, u_i(x, e_{m_i})\} \quad \forall i \rightarrow x \text{ λεπτομέρια κατά Nash}$$

Έστω $x = (x_1, \dots, x_n) \in S$

$$\forall i \text{ οποιαυε } x'_i = \frac{x_i + \sum_{j=1}^{m_i} \varphi_{ij}(x_i) e_{ij}}{1 + \sum \varphi_{ij}(x_i)}$$

Τότε $x'_i \in \Delta^{m_i}$, γιατί $x_i = (x_i(1), \dots, x_i(m_i)) \in \Delta^{m_i} \rightarrow \sum_{j=1}^{m_i} x_i(j) = 1$

Ενίσης, $\sum_{j=1}^{m_i} \varphi_{ij}(x) e_{ij} = \varphi_{i1}(x) e_{i1} + \varphi_{i2}(x) e_{i2} + \dots + \varphi_{im_i}(x) e_{im_i}$

$$\sum_{j=1}^{m_i} x_i(j) + \sum_{j=1}^{m_i} \varphi_{ij}(x) = 1 + \sum_{j=1}^{m_i} \varphi_{ij}(x) \rightarrow x'_i \in \Delta^{m_i}$$

$$\forall x \in S \text{ οποιαυε } T(x) = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = x' \in S$$

Αρά $T: S \rightarrow S$, γιατίς από Θ. Brower
Έχει σταθερό απέτιο.

Έστω $y = (y_1, \dots, y_n) \in S$ ώστε $T(y) = y$. Φα. δ.ο.
για λαμπροποιία Nash

Αναδειχνύουμε

$$\forall i \text{ έχουε } T(y) = y \rightarrow y'_i = y_i$$
$$y_i = y'_i = \frac{y_i + \sum \varphi_{ij}(y) e_{ij}}{1 + \sum \varphi_{ij}(y)}$$

Για κάθε k έχουε:

$$y_{i(k)} = y_{i(k)} + \frac{\varphi_{ik}(y)}{1 + \sum_{j=1}^{m_i} \varphi_{ij}(y)}$$

Ενεργή ή ως είναι γραπτό πάνω στο Δ^{m_i} σε κάθηλο

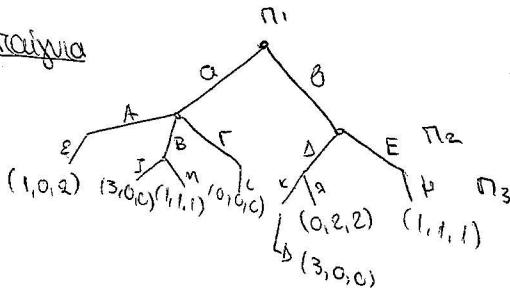
Επίκ της αυτό το k έχουε $\varphi_{ik}(y) = 0$

Αρά έχουε $y_{i(k)} = \frac{y_{i(k)}}{1 + \sum_{j=1}^{m_i} \varphi_{ij}(y)}$

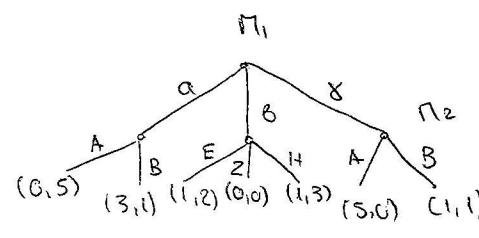
$$\varphi_{ij}(y) \geq 0 \quad \forall j \Rightarrow \varphi_{ii}(y) = 0 \quad \forall i \quad \therefore \rightarrow \text{για λαμπροποιία Nash}$$

Αναρριχώμενη παιχνίδια

Παραδείγματα

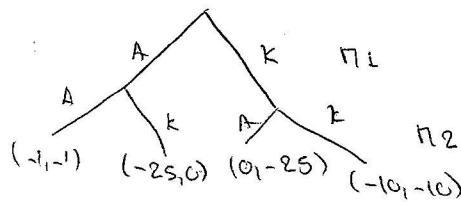


Παιχνίδιο πλήρεως πληροφορητικό



Παιχνίδιο ψηφιακό πληροφορητικό

Δι. φυλακτήρων



EΚΤΟΣ Ανθεξήν διενέφαστος min/max

" " Ισορροπία Nash

Υπ. (δημόσια)

Κεφάλαιο 2:

§ 2.5. οπωρ. συμβιβούμενων (ημιοπικές)

§ 2.6. ιμπεριαλιστικές συμβιβούμενες * να ξερω τα είδη

2.6.1 οχι

* Δεξιοκρατική σχέση προτίμησης

Κεφάλαιο 6: Οριζόντιο

⑥.6.10 και Λήπιδα 6.11 χωρίς αναδείξη

§ 7.1 με αναδείξεις

§ 7.2 μετά την πρώτην έ.11 με αναδείξεις

§ 7.3 χωρίς αναδείξεις (όπως εγνωστό παλινήπ.)

Κεφάλαιο 8: 8.1 } 8.2 } χωρίς αναδείξη

Κεφάλαιο 11: Νέα σε πορεία 11.2 (χωρίς αναδείξη)

Κεφάλαιο 12: Οριζόντιο είπεις από § 12.12

To θ μην-Nash και το J. θερμήνως ισορ. και Nash χωρίς αναδείξη

⑥.6.7 περιεκονούμενος γραφ. συμβιβούμενων σε μετα πολύτονες του εγνωστού

Μαθήτρια με αναδείξη $\oplus \frac{\text{μη}}{\text{μη}} \frac{\text{σοσ}}{\text{σοσ}}$

3 δευτερα δεμπίδια και 3 δευτερα αναντίσεις (Επίδειξη 2 και 2)

$K \subset \mathbb{R}^n$ μπροσ πολύτοπο με καρμάσες σα b_1, b_2, \dots, b_m . Αν b_1, \dots, b_m είναι τα extreme points του K , τότε $\forall x \in K$ υπάρχει $\gamma_i \in \mathbb{R}_+$, με $\sum_{i=1}^m \gamma_i = 1$ ώστε $x = \sum_{i=1}^m \gamma_i b_i$

Η γενερική αυτή του x δεν είναι κατωτάτην λειτουργία. Αν $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ γεωμετρική του n f προσονομείται στο K οταν απέκτει $x = \sum_{i=1}^m \gamma_i b_i$, εκτός $f(x) = \max\{f(b_1), \dots, f(b_m)\}$

Άρδη: $f(x) = \sum_{i=1}^m \gamma_i f(b_i)$. Ενδέχεται f προσονομείται στο K οταν απέκτει x , εκτός:

$$f(x) \geq f(y) \quad \forall y \in K \Rightarrow f(x) \geq f(b_i) \quad \forall i \quad \xrightarrow{\gamma_i \geq 0} \quad \gamma_i f(x) \geq \gamma_i f(b_i) \quad \forall i \Rightarrow \sum_{i=1}^m \gamma_i f(x) \geq \sum_{i=1}^m \gamma_i f(b_i) = f(x)$$

Άρα $\sum_{i=1}^m \gamma_i f(x) = \sum_{i=1}^m \gamma_i f(b_i)$. Άρα, $f(x) = f(b_i)$, για ένα ταχινότερο i , γνωστό, ότι $f(x) > f(b_i)$ ή
δεν μπορεί να ξαφνικείται.

Άρα $f(x) = \max\{f(b_i) \mid i = 1, \dots, m\}$. Ειδικότερα $\forall i$ με $\gamma_i > 0$ πρέπει να ξαφνικείται $f(x) = f(b_i)$, αριθμός $\{i = 1, 2, \dots, m \mid \gamma_i > 0\} \subseteq \{i = 1, 2, \dots, m \mid f(x) = f(b_i)\}$

Η f προσονομείται στο K , οταν απέκτει b_1, b_2, b_3 ως πρώτος οι
αριθμοί προσονομείται στον μεταπολυτό που διασχίζει τα b_1, b_2, b_3

