

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Επαναληπτική εξέταση στη Μιγαδική Ανάλυση  
ΟΜΑΔΑ: Β

30 Αυγούστου, 2012

**Θέμα 1.** Έστω η συνάρτηση  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ , όπου  $G$  ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$  και έστω  $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$ .

(α') Υποθέτουμε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $z_0$ . Θεωρώντας την  $f$  σαν συνάρτηση των πραγματικών μεταβλητών  $x, y$ , αποδείξτε ότι οι μερικές παράγωγοι  $f_x(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$ ,  $f_y(x_0, y_0) = u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)$  υπάρχουν και ισχύει

$$f'(z_0) = f_x(x_0, y_0) = -if_y(x_0, y_0).$$

(1 μον.)

(β') Αν  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ , δηλαδή η  $f$  παίρνει πραγματικές τιμές, αποδείξτε ότι είτε η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $z_0$  ή  $f'(z_0) = 0$ .

(0,5 μον.)

**Λύση.**

(α') Από την υπόθεση η παράγωγος

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

υπάρχει.

(i) Αν  $h \in \mathbb{R}$  με  $z_0 + h \in G$ , τότε το  $z_0 + h = x_0 + iy_0 + h = (x_0 + h) + iy_0$  ταυτίζεται με το σημείο  $(x_0 + h, y_0) \in G$  και επομένως

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0).$$

(ii) Αν  $h = ik$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , με  $z_0 + h \in G$ , τότε το  $z_0 + h = x_0 + iy_0 + ik = x_0 + i(y_0 + k)$  ταυτίζεται με το σημείο  $(x_0, y_0 + k) \in G$  και επομένως

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h = ik, k \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{ik} \\ &= -i \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = -if_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Άρα οι μερικές παράγωγοι  $f_x(x_0, y_0)$ ,  $f_y(x_0, y_0)$  υπάρχουν και είναι  $f'(z_0) = f_x(x_0, y_0) = -if_y(x_0, y_0)$ .

(β') Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $z_0$ . Επειδή η  $f$  παίρνει πραγματικές τιμές, από το (α') έπεται ότι  $f'(z_0) = f_x(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$  και  $if'(z_0) = f_y(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ . Αυτό όμως συνεπάγεται ότι  $f'(z_0) = 0$ .

■

**Θέμα 2.** Έστω η συνάρτηση  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ , όπου  $G$  ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ . Δώστε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η  $f$  αναλυτική στο  $G$ .

Αν  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μία αρμονική συνάρτηση, αποδείξτε ότι η συνάρτηση  $g := -\varphi_x + i\varphi_y$  είναι αναλυτική στο  $G$ . (1 μον.)

**Λύση.** Η  $f$  είναι αναλυτική στο  $G$  αν και μόνο αν η  $f$  (σαν συνάρτηση των πραγματικών μεταβλητών  $x, y$ ) έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο  $G$  και ικανοποιεί τις εξισώσεις (συνθήκες) Cauchy-Riemann

$$f_x = -if_y \Leftrightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}.$$

Επειδή η  $\varphi$  είναι αρμονική στο  $G$ , η  $\varphi$  έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης στο  $G$  και ικανοποιεί την εξίσωση Laplace:  $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$ . Επίσης είναι  $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$ .

Αν  $U := -\varphi_x$  και  $V := \varphi_y$ , οι συναρτήσεις  $U, V$  έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο  $G$  με

$$U_x - V_y = -\varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0 \quad \text{και} \quad U_y + V_x = -\varphi_{xy} + \varphi_{yx} = 0.$$

Επομένως οι  $U, V$  ικανοποιούν τις εξισώσεις (συνθήκες) Cauchy-Riemann και κατά συνέπεια η συνάρτηση  $g = -\varphi_x + i\varphi_y = U + iV$  είναι αναλυτική στο  $G$ . ■

**Θέμα 3.** (α') Έστω  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , ακέραια συνάρτηση (αναλυτική σ' όλο το  $\mathbb{C}$ ). Αν  $\Im f(z) = v(x, y) > 0$  για κάθε  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , χρησιμοποιώντας το θεώρημα Liouville ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο αποδείξτε ότι η  $f$  είναι σταθερή. (1 μον.)

(β') Διατυπώστε την "αρχή ελαχίστου" για ένα ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ .

Υπάρχει συνάρτηση  $f$  αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο  $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , συνεχής στο κύκλο  $|z| = 1$  και τέτοια ώστε

$$|f(z)| = e^{|z|} \text{ για κάθε } |z| \leq 1;$$

(1 μον.)

**Λύση.**

(α') 1ος τρόπος. Η συνάρτηση  $g(z) := e^{if(z)}$  είναι ακέραια με

$$|g(z)| = |e^{if(z)}| = |e^{iu(x,y) - v(x,y)}| = e^{-v(x,y)} < e^0 = 1 \quad (v(x, y) > 0 \text{ για κάθε } (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

για κάθε  $z \in \mathbb{C}$ . Επομένως, από το θεώρημα Liouville η συνάρτηση  $g$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{C}$ . Τότε και η  $|g(z)| = e^{-v(x,y)}$  θα είναι σταθερή οπότε και η  $\Im f(z) = v(x, y)$  είναι σταθερή. Άρα, από "βασικό παράδειγμα" και η συνάρτηση  $f$  θα είναι σταθερή στο  $\mathbb{C}$ .

2ος τρόπος. Αν  $h := \frac{1}{i + f}$ , τότε  $h(z) \neq 0$  για κάθε  $z \in \mathbb{C}$ . Επειδή  $\Im f = v > 0$ , η  $h$  είναι ακέραια συνάρτηση. Πράγματι,

$$|i + f(z)| \geq \Im(i + f(z)) = 1 + v(x, y) > 1 \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}$$

οπότε  $i + f(z) \neq 0$  για κάθε  $z \in \mathbb{C}$ . Επίσης για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  έχουμε

$$|h(z)| = \left| \frac{1}{i + f(z)} \right| = \frac{1}{\sqrt{u^2(x, y) + (1 + v(x, y))^2}} \leq \frac{1}{1 + v(x, y)} < 1,$$

δηλαδή η  $h$  είναι φραγμένη στο  $\mathbb{C}$ . Άρα, από το θεώρημα Liouville η  $h$  είναι σταθερή και κατά συνέπεια η  $f$  θα είναι σταθερή.

Σημείωση. Για την απόδειξη θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και τη συνάρτηση

$$g := \frac{1}{\beta i + f} \text{ για κάποιο } \beta > 0.$$

(β') *Αρχή ελαχίστου*: Αν η συνάρτηση  $f$  είναι αναλυτική στο ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο σύνολο  $G \subset \mathbb{C}$ , συνεχής στο σύνορο  $\partial G$  του  $G$  και  $f(z) \neq 0$  για κάθε  $z \in G$ , τότε η  $|f|$  παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο  $\partial G$  του  $G$  εκτός και αν η  $f$  είναι σταθερή στο  $G$ .

Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση  $f$  αναλυτική στο μοναδιαίο δίσκο, συνεχής στο σύνορο  $|z| = 1$  και τέτοια ώστε  $|f(z)| = e^{|z|}$  για κάθε  $|z| \leq 1$ . Τότε η  $f$  δεν μηδενίζεται στο μοναδιαίο δίσκο. Επειδή για κάθε  $|z| = 1$  είναι  $|f(z)| = e^1 = e$  και  $|f(0)| = e^0 = 1$ , η  $|f|$  δεν παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο  $|z| = 1$ . Επομένως από την αρχή ελαχίστου η  $f$  θα πρέπει να είναι σταθερή στο μοναδιαίο δίσκο. Όμως καμία σταθερή συνάρτηση δεν ικανοποιεί τη σχέση  $|f(z)| = e^{|z|}$  για κάθε  $|z| < 1$ . Άτοπο. Άρα, δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση  $f$ .

■

**Θέμα 4.** (α') Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)^2}.$$

Να βρεθεί το ανάπτυγμα(η σειρά) Laurent της  $f$  με κέντρο το  $z_0 = 1$  στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το σημείο  $2 - 2i$ . (1 μον.)

(β') Διατυπώστε το θεώρημα Laurent για μία αναλυτική συνάρτηση  $f$  στο δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}, 0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty, \text{ με κέντρο το } z_0 = 0.$$

Έστω  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$  και  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n z^n$  τα αναπτύγματα(οι σειρές) Laurent της  $f(z) = \frac{1}{\sin \pi z}$  στους δακτυλίους  $\Delta_1 : 0 < |z| < 1$  και  $\Delta_2 : 1 < |z| < 2$ , αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Laurent και το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων, αποδείξτε ότι

$$d_n = c_n \text{ για κάθε άρτιο αριθμό } n.$$

(1,5 μον.)

**Λύση.**

(α') Έχουμε τους δακτυλίους  $\Delta_1 : 0 < |z-1| < 2$  και  $\Delta_2 : |z-1| > 2$ . Το σημείο  $2 - 2i$  ανήκει στο δακτύλιο  $\Delta_2$ . Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά  $1/(1-w) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$ ,  $|w| < 1$ , έχουμε

$$\frac{1}{(1-w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1}, \quad |w| < 1.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)[(z-1)-2]^2} \\ &= \frac{1}{(z-1)^3 [1 - 2/(z-1)]^2} \\ &= \frac{1}{(z-1)^3} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2}{z-1}\right)^{n-1} && (|2/(z-1)| < 1 \Leftrightarrow |z-1| > 2) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n 2^{n-1} \frac{1}{(z-1)^{n+2}} \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} (n-2) 2^{n-3} \frac{1}{(z-1)^n}. \end{aligned}$$

Ο μεγαλύτερος δακτύλιος στον οποίο το παραπάνω ανάπτυγμα Laurent της  $f$  ισχύει είναι ο  $\Delta_2 : |z-1| > 2$ .

(β') Η αναλυτική συνάρτηση  $f$  στο δακτύλιο  $\Delta$  αναπτύσσεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \text{ για κάθε } z \in \Delta,$$

όπου η σειρά συγκλίνει απόλυτα στο  $\Delta$  και ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του  $\Delta$ . Οι συντελεστές  $a_n$  δίνονται από τον τύπο

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

όπου ο κύκλος  $|z| = \rho$  με κέντρο 0, ακτίνα  $\rho$ ,  $R_1 < \rho < R_2$  και θετική φορά διαγραφής ανήκει στο δακτύλιο  $\Delta$ .

(i)  $\Delta_1 : 0 < |z| < 1$ . Είναι

$$\frac{1}{\sin \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \text{ για κάθε } z \in \Delta_1,$$

όπου

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho_1} \frac{1}{z^{n+1} \sin \pi z} dz \text{ με } 0 < \rho_1 < 1.$$

Το 0 είναι το μοναδικό μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της  $g(z) = 1/z^{n+1} \sin \pi z$  στο εσωτερικό του κύκλου  $|z| = \rho_1$ . Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$c_n = \text{Res} \left( \frac{1}{z^{n+1} \sin \pi z}, 0 \right).$$

(ii)  $\Delta_2 : 1 < |z| < 2$ . Είναι

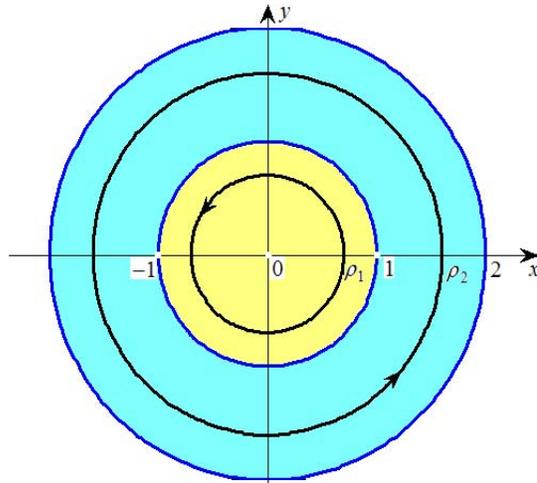
$$\frac{1}{\sin \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n z^n \text{ για κάθε } z \in \Delta_2,$$

όπου

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho_2} \frac{1}{z^{n+1} \sin \pi z} dz \text{ με } 1 < \rho_2 < 2.$$

Τα 0,  $\pm 1$  είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της  $g(z) = 1/z^{n+1} \sin \pi z$  στο εσωτερικό του κύκλου  $|z| = \rho_2$ . Τα σημεία  $\pm 1$  είναι απλοί πόλοι της  $g$ . Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$d_n = \text{Res} \left( \frac{1}{z^{n+1} \sin \pi z}, -1 \right) + \text{Res} \left( \frac{1}{z^{n+1} \sin \pi z}, 0 \right) + \text{Res} \left( \frac{1}{z^{n+1} \sin \pi z}, 1 \right).$$



Επομένως

$$\begin{aligned}
 d_n - c_n &= \operatorname{Res} \left( \frac{z^{-n-1}}{\sin \pi z}, -1 \right) + \operatorname{Res} \left( \frac{z^{-n-1}}{\sin \pi z}, 1 \right) \\
 &= \frac{z^{-n-1}}{(\sin \pi z)'} \Big|_{z=-1} + \frac{z^{-n-1}}{(\sin \pi z)'} \Big|_{z=1} \\
 &= \frac{(-1)^{-n-1}}{\pi \cos(-\pi)} + \frac{1}{\pi \cos \pi} \\
 &= -\frac{1}{\pi} \left( (-1)^{-n-1} + 1 \right) \\
 &= 0. \qquad \qquad \qquad (\text{αν } n \text{ άρτιος})
 \end{aligned}$$

■

**Θέμα 5.** (α') Αν  $z_0 \in \mathbb{C}$  και  $R > 0$ , υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι αναλυτική στο διάτρητο δίσκο

$$\Delta : 0 < |z - z_0| < R$$

και δεν είναι αναλυτική στο  $z_0$ . Αν  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  είναι το ανάπτυγμα(η σειρά) Laurent της  $f$  με κέντρο το  $z_0$  στο διάτρητο δίσκο  $\Delta$ , τότε το  $z_0$  είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της  $f$ ; Δώστε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το  $z_0$  ουσιώδες ανώμαλο σημείο της  $f$ . (0,5 μον.)

(β') Έστω η συνάρτηση  $g(z) = z^2 \sin(1/z)$ ,  $z \neq 0$ . Υπολογίστε τα όρια  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n)$  και  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\zeta_n)$ , όπου  $z_n = i/n$  και  $\zeta_n = 1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Υπάρχει το όριο  $\lim_{z \rightarrow 0} g(z)$ ; Τι είδους μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της  $g$  είναι το 0; Υπολογίστε το  $\operatorname{Res}(g, 0)$ . (1 μον.)

**Λύση.**

(α') Το  $z_0$  είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της  $f$ , αν στο ανάπτυγμα(στη σειρά) Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

της  $f$  στο διάτρητο δίσκο  $\Delta : 0 < |z - z_0| < R$  είναι  $a_n \neq 0$  για άπειρα το πλήθος  $n < 0$ .

Το  $z_0$  είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της  $f$

$\Leftrightarrow$  Το  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  δεν υπάρχει και δεν ισούται με  $\infty$  (δηλαδή  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| \neq \infty$ )

$\Leftrightarrow$  Η  $f$  δεν είναι φραγμένη σε διάτρητη περιοχή του  $z_0$  και  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| \neq \infty$ .

(β') Είναι  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = 0$ . Επειδή  $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{in} - e^{-in})$ , είναι

$$g(z_n) = -\frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n}{i}\right) = i \frac{e^n - e^{-n}}{2n^2} \quad \text{και} \quad g(\zeta_n) = \frac{\sin n}{n^2}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) &= i \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n - e^{-n}}{2n^2} \\ &= i \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n + e^{-n}}{4n} && \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\ &= i \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n - e^{-n}}{4} && \text{(κανόνας L'Hôpital)} \\ &= \infty \end{aligned}$$

και  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\zeta_n) = 0$ . Άρα το  $\lim_{z \rightarrow 0} g(z)$  δεν υπάρχει και δεν ισούται με  $\infty$ . Κατά συνέπεια το 0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της  $g$ .

Επειδή

$$g(z) = z^2 \sin \frac{1}{z} = z^2 \left( z - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots \right) = z^3 - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} - \dots,$$

$$\text{είναι } \text{Res}(g, 0) = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}.$$

■

**Θέμα 6.** (α') Αν η μιγαδική συνάρτηση  $f$  είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου  $|z| = 1$ , αποδείξτε ότι

$$\oint_{|z|=1} \overline{f(z)} dz = 2\pi i \cdot \overline{f'(0)}.$$

(1,2 μον.)

(β') Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{10} + \cos t} dt.$$

(1,3 μον.)

**Λύση.** Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου  $|z| = 1$  είναι  $z = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , με  $dz = ie^{it} dt = iz dt$ .

(α') Είναι

$$\begin{aligned}
 \oint_{|z|=1} \overline{f(z)} dz &= \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it})} i e^{it} dt \\
 &= - \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it}) i e^{-it}} dt \\
 &= - \overline{\left( \int_0^{2\pi} f(e^{it}) i e^{-it} dt \right)} \\
 &= - \overline{\left( \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{2it}} i e^{it} dt \right)} \\
 &= - \overline{\left( \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2} dz \right)} \\
 &= 2\pi i \overline{\left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2} dz \right)} \\
 &= 2\pi i \cdot \overline{f'(0)}. \quad (\text{ολοκληρωτικός τύπος Cauchy για παραγώγους})
 \end{aligned}$$

(β') Επειδή  $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$  και  $dt = (1/iz)dz$ , έχουμε

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{10} + \cos t} dt &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{\sqrt{10} + \frac{1}{2}(z + z^{-1})} \frac{1}{iz} dz \\
 &= \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 2\sqrt{10}z + 1} dz \\
 &= \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z + \sqrt{10} - 3)(z + \sqrt{10} + 3)} dz.
 \end{aligned}$$

Τα σημεία  $-\sqrt{10} \pm 3$  είναι απλοί πόλοι της  $f(z) = 1/(z + \sqrt{10} - 3)(z + \sqrt{10} + 3)$ . Επειδή μόνο το σημείο  $-\sqrt{10} + 3$  βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου  $|z| = 1$ , από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{5} + \cos t} dt &= \frac{2}{i} 2\pi i \cdot \text{Res}(f, -\sqrt{10} + 3) \\
 &= 4\pi \lim_{z \rightarrow -\sqrt{10} + 3} (z + \sqrt{10} - 3) \frac{1}{(z + \sqrt{10} - 3)(z + \sqrt{10} + 3)} \\
 &= 4\pi \cdot \frac{1}{6} = \frac{2\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

■

Συμβολισμός :  $\Im f(z) = \text{Im } f(z)$

Σημείωση : Αν το  $z_0 \in \mathbb{C}$  είναι πόλος τάξης  $k \in \mathbb{N}$  της συνάρτησης  $f$ , το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της  $f$  στο  $z_0$  δίνεται από τον τύπο

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^k f(z)]^{(k-1)}.$$

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες