

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΘΕΜΑ 1 (2.5 μονάδες):**

(Α) Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα από την κανονική κατανομή με άγνωστη μέση τιμή  $\mu$  και άγνωστη τυπική απόκλιση  $\sigma$ . Χρησιμοποιώντας το λόγο μέγιστων πιθανοφανειών να κατασκευαστεί κρίσιμη περιοχή  $K$  για τον έλεγχο  $H_0: \mu = \mu_0$  με εναλλακτική  $H_1: \mu \neq \mu_0$  με ε.σ.  $\alpha$ , όπου  $\mu_0$  γνωστή σταθερά.

(Β) Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα από την σ.π.π.  $f(x; \theta)$ ,  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$  άγνωστη παράμετρος. Έστω  $\hat{\theta}$  μία εκτιμήτρια του  $\theta$ . Δώστε τον ορισμό του μέσου τετραγωνικού σφάλματος του  $\hat{\theta}$  και εν συνεχεία αποδείξτε ότι  $MSE[\hat{\theta}] = \text{Var}[\hat{\theta}] + (E[\hat{\theta}] - \theta)^2$ .

**ΘΕΜΑ 2 (3.5 μονάδες):**

Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $[0, \theta]$ , όπου  $\theta > 0$  άγνωστη παράμετρος.

- (i) Ανήκει η παραπάνω κατανομή στην Εκθετική Οικογένεια Κατανομών; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- (ii) Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. του  $\theta$ , έστω  $\hat{\theta}$ .
- (iii) Να βρεθεί η σ.π.π. του  $\hat{\theta}$ .
- (iv) Υπολογίστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE) του  $\hat{\theta}$ .
- (v) Δείξτε ότι η  $\tilde{\theta} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του  $\theta$ .
- (vi) Υπολογίστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του  $\tilde{\theta}$ .
- (vii) Συμπεράνετε ότι  $\frac{MSE[\hat{\theta}]}{MSE[\tilde{\theta}]} \rightarrow 0$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ .

**ΘΕΜΑ 3 (4 μονάδες):**

Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα από την Weibull κατανομή με παραμέτρους  $\delta = \theta^{-\frac{1}{6}}$  και  $\eta = 6$ , όπου  $\theta > 0$  άγνωστη ποσότητα.

- (i) Αποδείξτε ότι η  $T = \sum_{i=1}^n X_i^6$  είναι επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση του  $\theta$ .
- (ii) Αποδείξτε ότι  $Y_i = 2\theta X_i^6 \sim X_2^2$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
- (iii) Κατασκευάστε ένα 95% Δ.Ε. για το  $\theta$ .
- (iv) Με την βοήθεια του Θεωρήματος Rao-Blackwell να βρεθεί Α.Ε.Ε.Δ. για το  $1/\theta$ .
- (v) Να βρεθεί η διασπορά της παραπάνω Α.Ε.Ε.Δ. και να συγκριθεί με το Cramer-Rao κατώτατο φράγμα των διασπορών των αμερόληπτων εκτιμητριών του  $1/\theta$ .