

Μαθηματική Χρηματοοικονομική Θεωρία
ΣΕΜΦΕ, 27-8-2014.

Θέμα 1. Έστω στοχαστική οικονομία με σύνολο καταστάσεων $S = \{1, 2, \dots, S\}$, σύνολο χρονικών περιόδων $T = \{0, 1, 2, \dots, T\}$ και διαμέριση πληροφορίας $\delta = \{\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_T\}$, όπου $\Delta_0 = \{S\}$ και $\Delta_T = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{S\}\}$.

Αν $\Delta_t = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$ είναι η διαμέριση πληροφορίας τη χρονική στιγμή t και F_t η áλγεβρα που παράγεται από τη Δ_t , τότε

- (i) ποιό είναι το σύνολο των μετρήσιμων συναρτήσεων ως προς την F_t ,
- (ii) πότε η απεικόνιση $x : T \times S \rightarrow R$ λέγεται στοχαστική ανέλιξη και εξηγήστε γιατί κάθε στοιχείο της οικονομίας (προσαρμοσμένο στη πληροφορία) υποτίθεται ότι είναι στοχαστική ανέλιξη?
- (iii) Αποδείξτε την απάντησή σας στην (i).

Θέμα 2. Έστω η στοχαστική οικονομία με σύνολο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, σύνολο χρονικών περιόδων $T = \{0, 1, 2, 3\}$ και διαμέριση πληροφορίας $\Delta_0 = \{S\}, \Delta_1 = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}\}$,

$\Delta_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}\}, \Delta_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}\}$.

Έστω το χρηματοοικονομικό συμβόλαιο $V = (0, 2, 4, 5, 6, 3, 4, 7, 1, 5, 5, 2, 6, 3, 2)$, ως προς τους κόμβους του δένδρου πληροφόρησης και έστω δικαίωμα αγοράς W , αμερικάνικου τύπου, που εγγράφεται στο V τη χρονική στιγμή $t = 0$ μετρηρομηνία λήξης $t = 3$ και τιμή εξάσκησης $k = 2$. Αν $p = (\frac{4}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}, \frac{3}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15})$ είναι το διάνυσμα πιθανότητας των διαφόρων καταστάσεων τη χρονική στιγμή $t = 3$, να τιμολογηθεί το W τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Θέμα 3. Έστω μετοχή που εξελίσσεται σύμφωνα με το διωνυμικό μοντέλο με αρχική τιμή $S_0 = 10$ συντελεστή ανόδου $u = 1.7$, συντελεστή καθόδου $d = 0.9$ και επιτόκιο $r = 0.1$ και έστω δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου που εγγράφεται στη μετοχή τη χρονική στιγμή 0 με τιμή εξάσκησης $k = 15$ ευρώ και ημερομηνία λήξης $t = 2$.

- (i) Να τιμολογηθεί το δικάωμα.
- (ii) Προσδιορίστε χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης εκ μέρους του εκδότη, δικαιώματος

Θέμα 4. Στη στοχαστική οικονομία του Θέματος 1,

(i) περιγράψτε τα forward-start δικαιώματα αγοράς και πώλησης. Ποιά είναι η κύρια διαφορά μεταξύ των δικαιωμάτων προαιρέσης (call options και put options) και των εξωτικών δικαιωμάτων;

(ii) Αν $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $T = \{0, 1, 2, 3\}$, $\Delta_0 = \{S\}, \Delta_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$, $\Delta_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$, $\Delta_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$, διάνυσμα πιθανότητας $p = (\frac{4}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{1}{12}, \frac{3}{12})$,

$V = (0, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 0, 3, 2, 1, 6)$ χρηματοοικονομικό συμβόλαιο (ως προς τους κόμβους του δένδρου πληροφόρησης), και W forward-start δικαίωμα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου που εγγράφεται στο χρηματοϊκονομικό συμβόλαιο V τη χρονική στιγμή 0, με ημερομηνία λήξης τη χρονική στιγμή 3, τιμή εξάσκησης $k = 1$, και διάνυσμα εξάσκησης το x_1 . Να προσδιοριστεί η τιμή πώλησης του δικαιώματος τη χρονική στιγμή $t = 2$.

$$3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + \frac{2}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7$$

Θέμα 5. Μεριγράψτε τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures). Πότε λέμε ότι επενδυτής νιοθετεί την αισιόδοξη θέση (long position) και πότε την απαισιόδοξη θέση (short position);

Έστω ότι επενδυτής επενδύει σε συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης 10.000 τραπεζικών μετοχών διάρκειας τριών μηνών και νιοθετεί τη short position. Η τιμή της μετοχής την ημερομηνία εγγραφής του συμβολαίου είναι 10 ευρώ, το αρχικό περιθώριο ασφάλισης (initial margin) είναι 15% αλλά ο επενδυτής αρχίζει καταθέτοντας ως εγγύηση μεγαλύτερο ποσό 20.000 ευρώ.

Αν κατά το πρώτο οκταήμερο η τιμή της μετοχής εξελίσσεται όπως στο παρακάτω πίνακα, συμπληρώστε τον πίνακα ώστε να φαίνεται η εξέλιξη του περιθώριου ασφάλισης και οι πιθανές ενέργειες του επενδυτή και σημειώστε ποιές από αυτές είναι υποχρεωτικές. Αν η αμοιβή του χρηματιστηριακού πράκτορα είναι 800 ευρώ, που είναι το κέρδος ή η ζημιά του επενδυτή στο τέλος των οκτώ ημερών;

ημέρα	τιμή μετοχής	κέρδος μετοχής	κέρδος επενδυτή	ύψος εγγύησης	ενέργεια
0	10.0	-	-	20.000	-
1	9.0	-	-		
2	8.5	-	-		
3	9.5	-	-		
4	10.5	-	-		
5	11.0	-	-		
6	10.5	-	-		
7	11.5	-	-		
8	11.0	-	-		

Καλή Επιτυχία.