

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1 (3.5 μονάδες):

- (Α) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε (για τη συνεχή περίπτωση μόνο) το Θεμελιώδες Λήμμα των Neyman-Pearson.
- (Β) Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα ($n > 2$) από την Ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[\theta, \theta+1]$, όπου $\theta \in \mathbb{R}$ άγνωστη παράμετρος.
- (i) Να βρεθεί επαρκής στατιστική συνάρτηση για το θ .
 - (ii) Να βρεθεί η εκτιμήτρια του θ , έστω T , με την μέθοδο των ροπών.
 - (iii) Είναι η T A.E.E.Δ.; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- (Γ) Έστω μία παρατήρηση X από την $N(0, \sigma^2)$. Να βρεθεί η E.M.P. του σ^2 και να ελέγξετε αν είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ^2 .

ΘΕΜΑ 2 (3 μονάδες):

Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την Poisson κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\lambda > 0$.

- (i) Ανήκει η εν λόγω κατανομή στην E.O.K.;
- (ii) Να βρεθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για το λ .
- (iii) Δείξτε ότι οι στατιστικές συναρτήσεις $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ και $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ είναι αμερόληπτες εκτιμήτριες για το λ .
- (iv) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Rao-Blackwell να αποφανθείτε ποια από τις παραπάνω δύο αμερόληπτες εκτιμήτριες είναι “καλύτερη”.
- (v) Να υπολογιστεί το Cramer-Rao κατώτατο φράγμα των αμερόληπτων εκτιμητριών του λ .

ΘΕΜΑ 3 (3.5 μονάδες):

Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την Ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-\theta, \theta]$, όπου $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρος.

- (i) Να βρεθεί η E.M.P. του θ .
- (ii) Αποδείξτε ότι η $T = \max |X_i|$ είναι επαρκής στατιστική συνάρτηση του θ .
- (iii) Βρείτε την κατανομή της τ.μ. T .
- (iv) Αποδείξτε ότι η $Y = T/\theta$ έχει σ.π.π. την $f_Y(y) = ny^{n-1}$.
- (v) Κατασκευάστε ένα 95% Δ.Ε. για το θ .

* Διάρκεια Εξέτασης: 2 ½ ώρες *

EYXOMAI EΠΙΤΥΧΙΑ