

Θεωρία Γραφημάτων
28 Αυγούστου 2014

- Διάρκεια: 2 $\frac{1}{2}$ ώρες.
- Καλή επιτυχία.

Θέμα 1^ο

Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών είναι γραφικές. Στην περύπτωση γραφικής ακολουθίας βαθμών να δοθεί απλό γράφημα που την υλοποιεί.

- i. (7,6,5,4,3,3,2)
- ii. (6,6,5,4,3,3,2)
- iii. (6,6,5,5,3,2)
- iv. (5,5,4,4,3,3,2) και το γράφημα να είναι διμερές

Θέμα 2^ο

Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G με $n \geq 5$ κορυφές, διάμετρο 2 και μια κορυφή τομής. Δείξτε ότι το συμπληρωματικό του γράφημα \bar{G} έχει μεμονωμένη κορυφή.

Θέμα 3^ο

Θεωρούμε δάσος F με n κορυφές και $2k \geq 2$ κορυφές περιττού βαθμού. Τότε το σύνολο των ακμών του F μπορεί να διαμεριστεί σε k μονοπάτια τα οποία είναι **ξένα ανά δύο μεταξύ τους** (ως προς τις ακμές).

Θέμα 4^ο

Έστω G ένα απλό συνεκτικό γράφημα. Ένας 2-παράγοντας είναι ένα παραγόμενο υπογράφημα που αποτελείται από ξένους μεταξύ τους κύκλους. Έστω G ένα 4-κανονικό απλό γράφημα. Να δειχθεί ότι το σύνολο των ακμών του G αναλύεται σε δύο ξένους μεταξύ τους 2-παράγοντες, δηλαδή υπάρχουν δύο 2-παράγοντες F_1 και F_2 του G για τους οποίουν $E(F_1) \cap E(F_2) = \emptyset$ και $E(F_1) \cup E(F_2) = E(G)$.

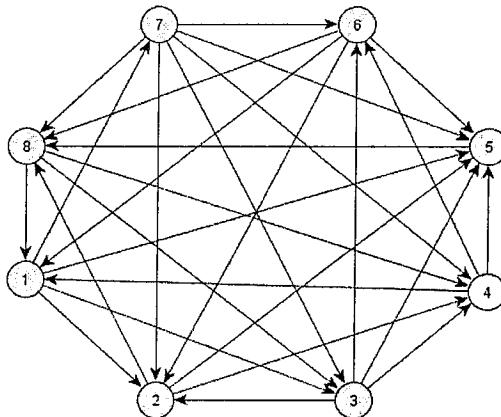
Θέμα 5^ο

Έστω απλό γράφημα G_1 . Υπάρχει απλό γράφημα G το οποίο να περιέχει το G_1 ως **κέντρο** (δηλαδή το επαγόμενο υπογράφημα του G που ορίζεται από το κέντρο του να είναι το G_1)? Βρείτε ένα τέτοιο γράφημα G ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχει.

Γυρίστε σελίδα...

Θέμα 6^ο

Ένα **τουρνουά (tournament)** είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ τέτοιο ώστε για κάθε ζεύγος κορυφών $u, v \in V$, ακριβώς μία από τις ακμές $(u, v), (v, u)$ ανήκει στο E . Για παράδειγμα, το παρακάτω γράφημα είναι ένα τουρνουά.



- i. Να δείξετε ότι σε ένα τουρνουά με $n + 1$ κορυφές, αν θεωρήσουμε μία οποιαδήποτε κορυφή u , και μία οποιαδήποτε αριθμηση v_1, \dots, v_n των υπολοίπων κορυφών, τότε ισχύει **τουλάχιστον** ένα από τα παρακάτω:
 - a. Η u συνδέεται με την v_1
 - b. Η v_n συνδέεται με την u
 - c. Υπάρχει δείκτης k , $1 \leq k \leq n - 1$, τέτοιος ώστε η v_k συνδέεται με την u και η u συνδέεται με την v_{k+1}
- ii. Ένα **μονοπάτι Hamilton** σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα είναι ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι το οποίο περνά από κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά. Να αποδειχθεί με επαγωγή, ότι ένα τουρνουά έχει πάντοτε ένα μονοπάτι Hamilton.
Σύνταση: Να γίνει χρήση της ιδιότητας που περιγράφει το πρώτο σκέλος του ερωτήματος.
- iii. Παρατηρήστε στο παραπάνω γράφημα ότι μπορούμε να πάμε στην κορυφή 5 από οποιαδήποτε άλλη κορυφή μέσω ενός μονοπατιού μήκους το πολύ 2. Την ίδια ιδιότητα έχει και η κορυφή 3. Να δειχθεί με επαγωγή ότι κάθε τουρνουά περιέχει μία κορυφή η οποία είναι προσπελάσιμη από όλες τις άλλες κορυφές μέσω μονοπατιού μήκους το πολύ 2.