

ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ-ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑ  
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2011-2012  
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ  
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΛΕΥΤΕΡΗΣ ΠΑΠΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ  
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: ΔΥΟ ΩΡΕΣ

Θέμα 1

Ένα σωματίδιο κινείται στην κατευθυνση  $x$  κατά μήκος μίας κοσμικής διαδρομής με χωροχρονικές συνταταγμένες.

$$t(\tau) = a^{-1} \sinh(a\tau), \quad x(\tau) = a^{-1} \cosh(a\tau)$$

όπου  $\tau$  είναι ο ιδιόχρονος και  $a$  μία σταθερά.

- α. Κατασκευάστε το χωροχρονικό διάγραμμα. Τι συμπεραίνετε από την μορφή της κοσμικής διαδρομής για την κίνηση του σωματιδίου;
- β. Υπολογίστε το τετράνυσμα της ταχύτητας του σωματιδίου. Είναι αυτή σωστά κανονοικοποιημένη;
- γ. Βρείτε το τριάνυσμα της ταχύτητας του σωματιδίου. Μπορεί αυτή να ξεπεράσει την ταχύτητα του φωτός;
- δ. Βρείτε το τετράνυσμα της επιτάχυνσης του σωματιδίου.

Θέμα 2

Θεωρείστε δύο σημεία A και B στον χωρόχρονο που απέχουν μεταξύ τους μία χωροχρονική απόσταση. Θεωρείστε επίσης όλες τις κοσμικές διαδρομές μεταξύ αυτών. Εφαρμόζοντας την αρχή της ελάχιστης δράσης βρείτε την εξίσωση κίνησης ενός ελευθέρου σωματιδίου.

Θέμα 3

Η μετρική ενός επιπέδου σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$$

Βρείτε τις γεωδεσιακές.

Θέμα 4

Θεωρείστε τον χωρόχρονο που καθορίζεται από την μετρική

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

α. Βρείτε έναν μετασχηματισμό σε νέες συντεταγμένες  $(v, \tau, \theta, \phi)$  ο οποίος δίνει  $g_{rr} = 0$  και δείχνει ότι η μετρική δεν έχει απροσδιοριστία στο  $r = M$ .

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε Eddington-Finkelstein συντεταγμένες.

β. Περιγράφει η γεωμετρία μία μελανή οπή;