



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
TΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εφαρμοσμένη Στατιστική - 4 Ιουλίου 2012

Άσκηση 1 (25 μονάδες)

Η διάρκεια ζωής ενός ανταλλακτικού σε ώρες είναι τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = C(\alpha)e^{-\alpha x^{2/3}}, \quad x > 0.$$

α) Δείξτε ότι $C(\alpha) = \frac{4\alpha^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}$. (Τιόδειξη: κάντε τον μετασχηματισμό $y = \alpha x^{2/3}$.)

β) Τιολογίστε την μέση τιμή μ και την διασπορά σ^2 της X συναρτήσει του α .

γ) Τιολογίστε την EMII της άγνωστης παραμέτρου α από ένα τυχαίο δείγμα της διάρκειας ζωής η ανταλλακτικών.

Άσκηση 2 (25 μονάδες)

Οι X, Y είναι ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. με κατανομή $Exp(\lambda)$.

α) Ποια είναι η από κοινού σ.π.π. των X, Y ;

β) Βρείτε την από κοινού σ.π.π. των τ.μ. $U = X/Y$ και $V = Y$.

γ) Ποια είναι η σ.π.π. της τ.μ. U ;

δ) Τιολογίστε την πιθανότητα του ενδεχομένου $U \in [\frac{1}{2}, 2]$.

ε) Δείξτε ότι η τ.μ. $1/U$ ακολουθεί την ίδια κατανομή όπως η U .

Άσκηση 3 (20 μονάδες)

Ένας καταστηματάρχης ισχυρίζεται ότι οι συσκευασίες ζάχαρης που πουλάει περιέχουν 1000 gr. Το πραγματικό βάρος κάθε συσκευασίας είναι μια τ.μ. που ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Μετρήσατε το βάρος (σε gr) 10 πακέτων και βρήκατε τις ακόλουθες τιμές:

990, 992, 1004, 975, 994, 995, 1003, 997, 992, 998.

α) Κατασκευάστε ένα συμμετρικό 0,95-διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή μ .

β) Ελέγξτε με επίπεδο σημαντικότητας 0,95 την υπόθεση $\mu = 1000$ έναντι της εναλλακτικής $\mu \neq 1000$.

Άσκηση 4 (30 μόναδες)

Θέλετε να εκτιμήσετε το ποσοστό των ανθρώπων που κάνουν ειλικρινή φορολογική δήλωση. Στην περυσινή σας απόπειρα, στην ερώτησή “κάνατε ειλικρινή φορολογική δήλωση;” όλοι απάντησαν NAI. Το ποπτεύεστε ότι μπορεί κάποιοι να απάντησαν ψέματα, γιαυτό φέτος αποφασίσατε να ακολουθήσετε μια διαφορετική στρατηγική. Θα δίνετε στους ερωτώμενους ένα ζάρι το οποίο θα ρίχνουν κρυφά από εσάς. Αν φέρουν 1 ή 6 θα απαντούν στην ερώτηση σας ειλικρινά, ενώ αν φέρουν 2,3,4 ή 5 θα απαντούν ψέματα. Σκέφτεστε ότι έτσι κανείς δεν θα φοβάται να απαντήσει OXI, αφού αυτό μπορεί να συμβεί επειδή έκανε μεν ειλικρινή δήλωση, αλλά έφερε 2,3,4 ή 5, κάτι που εσείς δεν μπορείτε να ζέρετε.

α) Τιολογίστε την πιθανότητα ότι να απαντήσει κάποιος στην ερώτησή σας NAI, σαν συνάρτηση του ποσοστού p των ανθρώπων που έκαναν ειλικρινή δήλωση.

β) Τιολογίστε την πιθανότητα να έκανε ειλικρινή δήλωση κάποιος που έχει απαντήσει στην ερώτησή σας NAI.

γ) Θα κάνετε την ερώτηση σε $n = 2400$ τυχαία επιλεγμένα άτομα. Ποια κατανομή και με ποιες παραμέτρους ακολουθεί ο αριθμός N των ατόμων που απαντούν NAI;

δ) Τιολογίστε την EMII ότις παραμέτρους q από το πλήθος N των θετικών απαντήσεων.

ε) Τιολογίστε την EMII ότις παραμέτρους p από το πλήθος N των θετικών απαντήσεων.

στ) Αν στην ερώτησή σας απάντησαν NAI 960 άτομα βρείτε ένα προσεγγιστικό 0,90-διάστημα εμπιστοσύνης για την άγνωστη παραμέτρο p .

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Συνάρτηση Γάμμα: $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$

Κατανομή Γάμμα $G(\alpha, p)$: σ.π.π. $f(x) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\alpha x}, \quad x > 0.$

Κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: σ.π.π. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$

Διωνυμική κατανομή $b(n, q)$: σ.μ.π. $p(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}.$

Χρήσιμες ιδιότητες

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$
- Αν $X_i \sim G(\alpha, p_i)$ ανεξάρτητες, τότε $\sum X_i \sim G(\alpha, \sum p_i)$.
- $\mathcal{E}xp(\alpha) = G(\alpha, 1).$
- Αν $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ανεξάρτητες, τότε $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n) = G(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}).$
- Αν $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ανεξάρτητες, τότε $\sigma^{-2}(n-1)S^2 = \sigma^{-2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$ και ανεξάρτητη της \bar{X} .
- Αν $X \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad nY \sim \chi^2(n)$ και X, Y ανεξάρτητες τότε $\frac{X}{\sqrt{Y}} \sim t(n)$ (Student).
- Αν $nX \sim \chi^2(n), \quad mY \sim \chi^2(m)$ και X, Y ανεξάρτητες τότε $\frac{X}{Y} \sim F(n, m)$ (Snedecor.)

Στατιστικά για τον έλεγχο μέσου κανονικών πληθυσμών: Γνωστή διασπορά $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ Άγνωστη διασπορά $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$

Σημεία x όπου η σ.κ.π. φτάνει μια κρίσιμη τιμή

Κατανομή	$F(x) = 0,95$	$F(x) = 0,975$	$F(x) = 0,99$	$F(x) = 0,995$
$t(9)$	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498
$t(10)$	1,8125	2.2281	2,7638	3,1693
$\mathcal{N}(0, 1)$	1,6449	1,96	2,3263	2,5758

Διάρκεια Εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!