

Εξέταση «Βελτιστοποίησης» Ιουνίου 2013

Θέμα 1 (α) Έστω $f: V \rightarrow R$, $\bar{x} \in V \subset R^n$, $f \in C^2$ κοντά στο \bar{x} και $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

Αποδείξτε ότι αν ο Εστιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος τότε το σημείο \bar{x} είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

(β) Να μελετηθεί με βάση του Θεώρημα του Θέματος 1(α) η ύπαρξη σημείου τοπικού ελαχίστου για την συνάρτηση $f(x, y) = 3x^2 + xy + y^2 + x + y$.

Θέμα 2 Έστω $f: R^3 \rightarrow R$, $f(x, y, z) = 2x + y + z$ και το σύνολο περιορισμών (δίσκος)

$U = \{(x, y, z) \notin R^3 : x^2 + y^2 \leq 3, z = 0\}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο ελαχίστου της f στο U , και να υπολογιστεί αυτό με βάση το θεώρημα των πολλαπλασιαστών Kuhn-Tucker-Lagrange. Είναι το σημείο αυτό μοναδικό;

Θέμα 3 (α) Έστω $f: S \subset R^n \rightarrow R$ μία συνάρτηση συνεχής και πιεστική, ορισμένη στο μη κενό, κλειστό και μη φραγμένο σύνολο S . Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ελαχίστου.

(β) Να μελετηθεί η ύπαρξη σημείου τοπικού ελαχίστου για την συνάρτηση $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, στο σύνολο περιορισμών $S = \{(x, y, z)^T \in R^3 : x^2 + (y-1)^2 = 1\}$.

Θέμα 4 (α) Έστω η συνάρτηση $f: R^2 \rightarrow R$, $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ και το σύνολο περιορισμών $U = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Να εκτελεστεί ένα βήμα των προβεβλημένων κλίσεων με αρχικό διάνυσμα το $[1/2, 1/4]^T$.

(β) Να αποδείξετε ότι το y_k είναι η προβολή του διανύσματος $x_k - \frac{1}{\gamma} \nabla f(x_k)$ στο σύνολο των περιορισμών U .

Αλγόριθμος των προβεβλημένων κλίσεων (με βέλτιστο βήμα):

1) Θέτουμε $\kappa=0$, και επιλέγουμε $x_0 \in U$.

2) Βρίσκουμε κατεύθυνση ώστε y_k

$$\zeta_k := \nabla f(x_k)^T (y_k - x_k) + \frac{\gamma}{2} \|y_k - x_k\|_2^2 = \min_{y \in U} (\nabla f(x_k)^T (y - x_k) + \frac{\gamma}{2} \|y - x_k\|_2^2)$$

3) Θέτουμε $\delta_k = \nabla f(x_k)^T (y_k - x_k)$. Αν $\delta_k = 0$ σταματάμε. Διαφορετικά,

4) Βρίσκουμε βήμα α_k ώστε

$$f(x_k + \alpha_k (y_k - x_k)) - f(x_k) = \min_{\{\alpha \in [0, 1]\}} (f(x_k + \alpha (y_k - x_k)) - f(x_k))$$

5) $x_{k+1} = x_k + \alpha_k (y_k - x_k)$

Καλή επιτυχία.

Διάρκεια εξέτασης, 2 & ½ ώρες.