

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2016

**ΘΕΜΑ 1 (ΜΟΝ. 2.5)**

Θεωρούμε το γενικό πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu = f, \text{ στο } \Omega \\ Mu = g, \text{ στο } \Gamma \text{ σύνορο του } \Omega \end{cases}$$

Να περιγραφεί αναλυτικά (έως και την κατασκευή του γραμμικού συστήματος) η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων για τον υπολογισμό μιας προσεγγιστικής λύσης του παραπάνω Π.Σ.Τ.

**ΘΕΜΑ 2 (ΜΟΝ. 2.5)**

Θεωρούμε το πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \text{ στο } \Omega = (0,1) \times (0,1) \\ u = 0, \text{ στο } \Gamma \text{ (σύνορο του } \Omega) \end{cases} \quad (1)$$

Ορίζουμε τον χώρο συναρτήσεων  $V = \{v / v \in C(\bar{\Omega}), \text{ κατά τμήματα } C^1, \text{ με } v = 0 \text{ στο } \Gamma\}$ . Ακόμα θεωρούμε  $B(u, v) = \iint_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx \, dy$  και  $F(v) = \iint_{\Omega} fv \, dx \, dy$ . Τότε η ασθενής μορφή του προβλήματος Dirichlet γράφεται:

$$\begin{cases} \text{Να βρεθεί } u \in V, \text{ τέτοιο ώστε} \\ B(u, v) = F(v), \forall v \in V \\ u = 0, \text{ στο } \Gamma \text{ σύνορο του } \Omega \end{cases} \quad (2)$$

Στη μέθοδο Galerkin διαλέγουμε έναν προσεγγιστικό υπόχωρο  $V_n$  διάστασης  $n$  του  $V$  και θεωρούμε το ακόλουθο προσεγγιστικό πρόβλημα:

$$\begin{cases} \text{Να βρεθεί } \bar{u}_n \in V_n, \text{ τέτοιο ώστε} \\ B(\bar{u}_n, \varphi) = F(\varphi), \forall \varphi \in V_n \end{cases} \quad (3)$$

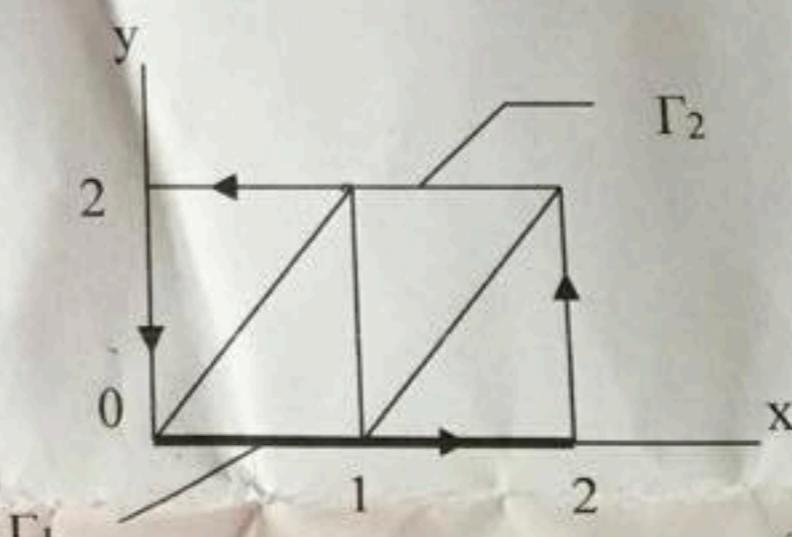
Να διατυπώσετε κατάλληλες υποθέσεις και να αποδείξετε το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας Galerkin, δηλαδή ότι υπάρχει ένα μοναδικό  $\bar{u}_n \in V_n$  που ικανοποιεί την (3).

**ΘΕΜΑ 3 (ΜΟΝ. 2.5)**

Να υπολογιστούν τα στοιχεία του γραμμικού συστήματος Galerkin για το πρόβλημα:

$$\begin{cases} -\nabla^2 u + u = x, \text{ στο } \Omega \\ u = 0, \text{ στο } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial r} = 1, \text{ στο } \Gamma_2 \end{cases}$$

χρησιμοποιώντας συναρτήσεις βάσης πυραμίδες.



**ΘΕΜΑ 4 (ΜΟΝ. 2.5)**

Να υπολογισθούν τα στοιχεία  $a_{ij}$  και τα δεύτερα μέλη  $b_i$  του γραμμικού συστήματος  $Ac = b$  που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου Galerkin με  $n$  συναρτήσεις βάσης στέγες στο ομογενές πρόβλημα που προκύπτει από το μη ομογενές πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών

$$-u'' + xu = 0, \text{ στο } (0,1)$$

$$u(0) = 0, u(1) = 1.$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 2.5 ΩΡΕΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΤΡΕΠΟΝΤΑΙ ΤΑ 10 ΠΡΩΤΑ ΛΕΠΤΑ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ