

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α Ι Ι

19 Σεπτεμβρίου 2014

Απαντήστε σε όλα τα ερωτήματα. Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες

1. Έστω  $G$  τυχαία πεπερασμένη ομάδα τάξης  $n$ . Διατυπώσατε ένα μερικό αντίστροφο του Θεωρήματος Lagrange.
2. Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένη ακεραία περιοχή είναι σώμα.
3. Αναλύστε το πολυώνυμο  $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$  σε γινόμενο ανάγωγων παραγόντων στον  $\mathbb{Z}_7[x]$ . Είναι αυτή η ανάλυση μοναδική, αν εξαιρέσουμε πολλαπλασιασμό με μονάδες του  $\mathbb{Z}_7$ ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
4. Βρείτε όλα τα πρώτα και όλα τα μέγιστα ιδεώδη του  $\mathbb{Z}_{15}$ . (Υπόδειξη: Ένα ιδεώδες  $N \neq R$  σε έναν αντιμεταθετικό δακτύλιο  $R$  λέγεται πρώτο ιδεώδες αν από την  $ab \in N$  έπεται ότι ή  $a \in N$  ή  $b \in N$  για κάθε  $a, b \in R$ .)
5. Έστω  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$  με  $a_0 \neq 0$ . Δείξτε ότι αν το  $f(x)$  έχει μία ρίζα στο  $\mathcal{Q}$  τότε έχει μία ρίζα  $m$  στον  $\mathbb{Z}$ , και το  $m$  πρέπει να διαιρεί τον  $a_0$ .
6. Δείξτε ότι το πολυώνυμο  $x^3 - 18x^2 + 6x + 12$  είναι ανάγωγο πάνω από το  $\mathcal{Q}$ .
7. Εξετάστε εάν ο δακτύλιος - πηλίκο  $\frac{\mathcal{Q}[x]}{\langle x^3 - 18x^2 + 6x + 12 \rangle}$  είναι σώμα. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
8. Έστω  $\alpha$  αλγεβρικό πάνω από το  $\mathcal{Q}$  με  $\text{irr}(\alpha, \mathcal{Q}) = x^3 - 18x^2 + 6x + 12$ , και έστω  $E$  η ελάχιστη επέκταση του σώματος  $\mathcal{Q}$  που περιέχει το  $\alpha$ . Δείξτε ότι ο  $E$  είναι ένας 3-διάστατος γραμμικός χώρος πάνω από το  $\mathcal{Q}$  και δώστε την μορφή των στοιχείων του.
9. Κατασκευάσατε το αριθμό  $\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$  με κανόνα και διαβήτη.

Καλή επιτυχία!

Σ. Λαμπροπούλου