

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α ΚΑΙ Ε Φ Α Ρ Μ Ο Γ Ε Σ

1 Απριλίου 2014

Απαντήστε και στα τέσσερα ισοδύναμα θέματα. Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες και 30 λεπτά.

ΘΕΜΑ 1ο

- α) Έστω G η ομάδα $\{e, a, b, b^2, ab, ab^2\}$ της οποίας οι γεννήτορες a, b ικανοποιούν τις σχέσεις: $a^2 = e$, $b^3 = e$, $ba = ab^2$. Γράψτε τον πίνακα πολλαπλασιασμού της G .
β) Έστω $U = \{e^{i2\pi r} = (\cos 2\pi r, \sin 2\pi r) \mid r \in \mathbb{R}\}$ ο τριγωνομετρικός κύκλος και έστω (U, \cdot) η αντίστοιχη πολλαπλασιαστική ομάδα. Περιγράψτε όλες τις πεπερασμένες χυκλικές υποομάδες της ομάδας (U, \cdot) .

ΘΕΜΑ 2ο

- α) Στην S_5 γράψτε την μετάθεση $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ με δύο διαφορετικούς τρόπους ως κύκλο και ως γινόμενο αντιμεταθέσεων.
β) Έστω η μετάθεση της S_9 : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 9 & 1 & a & 8 & 2 & b & 5 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν τα a, b έτσι ώστε η σ να είναι γινόμενο τριών ξένων κύκλων. Στην περίπτωση αυτή βρείτε την τάξη της σ καθώς και την σ^{-1} .
γ) Έστω $c \in S_n$ ένας κύκλος μήκους s , δηλαδή $c = a_1 a_2 \cdots a_s$. Δείξτε ότι αν το s είναι πολλαπλάσιο του k , έστω $s = kt$, τότε η μετάθεση c^k είναι γινόμενο k κύκλων μήκους t .

ΘΕΜΑ 3ο

- α) Έστω G, G' ισομορφικές ομάδες και έστω H υποομάδα της G τάξης d . Δείξτε ότι και η ομάδα G' θα περιέχει υποομάδα τάξης d .
β) Δώστε όλες τις μη ισομορφικές αβελιανές ομάδες τάξεως 200 σύμφωνα με το Θεώρημα Ταξινόμησης Πεπερασμένα Παραγόμενων Αβελιανών Ομάδων, και στη συνέχεια συμπτύξτε τις κατά το δυνατόν.
γ) Για δύο από τις ομάδες του υποερωτήματος β) δείξτε ότι δεν είναι ισομορφικές.

ΘΕΜΑ 4ο

- α) Έστω G, G' ομάδες και έστω $f : G \longrightarrow G'$ ομομορφισμός με πυρήνα $\text{Ker } f$. Δείξτε ότι για στοιχεία $a, b \in G$ θα ισχύει: $f(a) = f(b)$ αν και μόνον αν: $a \text{ Ker } f = b \text{ Ker } f$.
β) Κατασκευάστε έναν μη τετριμμένο ομομορφισμό από την ομάδα \mathbb{Z}_{15} στην ομάδα \mathbb{Z}_{12} .

Καλή επιτυχία!

Σ. Λαμπροπούλου