

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α Κ Α Ι Ε Φ Α Ρ Μ Ο Γ Ε Σ

8 Οκτωβρίου 2014

Απαντήστε και στα τρία ισοδύναμα θέματα. Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες.

**ΘΕΜΑ 1ο**

- α) Έστω  $G = \langle a \rangle$  κυκλική ομάδα τάξης 30. Δώστε όλες τις υποομάδες της  $G$ .
- β) Διατυπώσατε το Θεώρημα Ταξινόμησης Κυκλικών Ομάδων. Με ποιά ομάδα σύμφωνα με το Θεώρημα είναι ισομορφική η  $4\mathbb{Z}$ ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- γ) Στην  $S_5$  γράψτε την μετάθεση  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  με δύο διαφορετικούς τρόπους ως κύκλο και ως γινόμενο αντιμεταθέσεων.
- δ) Έστω η μετάθεση της  $S_9$ :  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ a & b & 6 & 3 & 9 & 8 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Να βρεθούν τα  $a, b$  έτσι ώστε η  $\sigma$  να είναι γινόμενο δύο ξένων κύκλων. Στην περίπτωση αυτή βρείτε την τάξη της  $\sigma$  καθώς και την  $\sigma^{-1}$ .

**ΘΕΜΑ 2ο**

- α) Δώστε όλες τις μη ισομορφικές αβελιανές ομάδες τάξεως 180 σύμφωνα με το Θεώρημα Ταξινόμησης Πεπερασμένα Παραγόμενων Αβελιανών Ομάδων, και στη συνέχεια συμπύξτε τις ισομορφικά κατά το δυνατόν περισσότερο. (Υπόδειξη:  $180 = 2^2 3^2 5$ .)
- β) Ποιά ομάδα από τον παραπάνω κατάλογο είναι κυκλική; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Είναι η μοναδική κυκλική από τον κατάλογο; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- γ) Έστω  $G, G'$  ισομορφικές ομάδες και έστω  $H$  υποομάδα της  $G$  τάξης  $d$ . Δείξτε ότι και η ομάδα  $G'$  θα περιέχει υποομάδα τάξης  $d$ .
- δ) Για δύο από τις ομάδες του υποερωτήματος α) δείξτε ότι δεν είναι ισομορφικές.

**ΘΕΜΑ 3ο**

- Έστω  $G, G'$  ομάδες και έστω  $f : G \rightarrow G'$  ομομορφισμός με πυρήνα  $\text{Ker } f$  και εικόνα  $\text{Im } f$ .
- α) Δείξτε ότι ο  $\text{Ker } f$  είναι υποομάδα της  $G$ .
- β) Δείξτε ότι για κάθε στοιχείο  $f(a) \in \text{Im } f$  ισχύει για την αντίστροφη εικόνα του ότι  $f^{-1}\{f(a)\} = a \text{Ker } f$ .
- γ) Διατυπώσατε το Θεώρημα Lagrange και δώστε την κύρια ιδέα της απόδειξής του.
- δ) Δείξτε ότι δεν υπάρχει μη τετριμμένος ομομορφισμός από την ομάδα  $\mathbb{Z}_{15}$  στην ομάδα  $\mathbb{Z}_4$ .

Καλή επιτυχία!

Σ. Λαμπροπούλου