

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**  
**Εξετάσεις στη Μαθηματική Ανάλυση II**  
**ΟΜΑΔΑ: A**

20 Ιουνίου, 2011

**Θέμα 1.** (α') Να εξεταστεί αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$$

συγκλίνει και αν ναι να υπολογιστεί.

(1 μον.)

(β') Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το άθροισμα της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n + 2^{-n}) x^n.$$

(1,5 μον.)

**Λύση.**

(α') Για κάθε  $x \geq 1$  είναι

$$0 < \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} < \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

και ως γνωστόν το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_1^\infty (1/x^{3/2}) dx = 2$  συγκλίνει. Από το κριτήριο σύγκρισης και το γενικευμένο ολοκλήρωμα  $\int_1^\infty (1/(1+x)\sqrt{x}) dx$  θα συγκλίνει. Είναι

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx &= 2 \int_1^\infty \frac{1}{1+t^2} dt && (\text{αντικατάσταση } t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2) \\ &= 2 \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan t - \arctan 1 \right) \\ &= 2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(β') Αν  $a_n = n + 2^{-n}$ , είναι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1+2^{-n-1}}{n+2^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+1/n+1/n2^{n+1}}{1+1/n2^n} = 1.$$

Επομένως, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι  $R = 1$ . Δηλαδή, η δυναμοσειρά συγκλίνει για  $|x| < 1$ .

Ως γνωστόν, για  $|x| < 1$  είναι

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad \text{και} \quad \frac{x/2}{1-x/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

Άρα, για  $|x| < 1$  έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (n + 2^{-n}) x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x}{2-x}. \end{aligned}$$

■  
Θέμα 2. Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ .

- (α') Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι  $f_x(0, 0)$ ,  $f_y(0, 0)$  και να αποδειχθεί ότι η  $f$  δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο  $(0, 0)$ . (1,5 μον.)
- (β') Αν  $y = x^2\varphi(x)^3$ , όπου  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη συνάρτηση με  $\varphi(0) = 1$ , ορίζουμε τη συνάρτηση  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$F(x) := f(x, x^2\varphi(x)^3).$$

Τυπολογίστε την παράγωγο  $F'(0)$  με δύο τρόπους, κατευθείαν και μετά χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας για συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Δίνουν οι δύο διαφορετικοί τρόποι το ίδιο αποτέλεσμα; Αν όχι, τί λάθος κάνετε; (1 μον.)

**Λύση.**

- (α') Είναι

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0, \text{ για κάθε } x \neq 0 \text{ και επομένως } f_x(0, 0) = 0.$$

Παρόμοια,

$$\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0, \text{ για κάθε } y \neq 0 \text{ και επομένως } f_y(0, 0) = 0.$$

Αν υποθέσουμε ότι η  $f$  είναι διαφορίσιμη στο σημείο  $(0, 0)$ , θα πρέπει να είναι

$$\begin{aligned} f(h, k) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)h + f_y(0, 0)k + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2} \\ &= \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}. \end{aligned} \quad (\text{με } \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h, k) = 0)$$

Τότε,

$$\varepsilon(h, k) = \frac{\sqrt[3]{hk}}{\sqrt{h^2 + k^2}}, \quad \text{για κάθε } (h, k) \neq (0, 0).$$

Όμως, κατά μήκος της ευθείας  $k = h$  έχουμε

$$\varepsilon(h, h) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[3]{|h|}}, \quad h \neq 0$$

και επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h, h) = +\infty \neq 0. \quad (\text{άτοπο})$$

Άρα, η συνάρτηση  $f$  δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο  $(0, 0)$ .

- (β') Επειδή  $F(x) := x\varphi(x)$ , είναι  $F'(x) = \varphi(x) + x\varphi'(x)$  και επομένως  $F'(0) = \varphi(0) = 1$ .  
Αν όμως χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα αλυσίδας για συναρτήσεις δύο μεταβλητών, τότε

$$F'(x) = \frac{d}{dx}f(x, x^2\varphi(x)^3) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d}{dx}(x^2\varphi(x)^3).$$

Επειδή από το (α') είναι  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ , τελικά έχουμε

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \left. \frac{d}{dx}(x^2\varphi(x)^3) \right|_{x=0} = 0.$$

Ο δεύτερος τρόπος μας δίνει λάθος αποτέλεσμα και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η συνάρτηση  $f$  δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο  $(0, 0)$ . Ο κανόνας αλυσίδας χρησιμοποιείται εφόσον η συνάρτηση είναι διαφορίσιμη.

■ **Θέμα 3.** (α') Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{αν } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Αν  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  είναι ένα οποιοδήποτε μοναδιαίο διάνυσμα του επιπέδου, αποδείξτε ότι η παράγωγος  $f$  στο  $(0, 0)$  κατά την κατεύθυνση του διανύσματος  $\mathbf{u}$  υπάρχει. Για ποια  $\mathbf{u}$  είναι

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{u};$$

Τί συμπεραίνετε για τη διαφορισμότητα της συνάρτησης  $f$  στο  $(0, 0)$ ; (1,5 μον.)

- (β') Έστω οι επιφάνειες  $x^2 - 2y^2 + z^2 = 0$ ,  $xyz = 1$  και έστω  $(x_0, y_0, z_0)$  σημείο της τομής των. Αποδείξτε ότι τα εφαπτόμενα επίπεδα των επιφανειών στο σημείο  $(x_0, y_0, z_0)$  είναι κάθετα μεταξύ τους. (1 μον.)

**Λύση.**

(α') Έστω  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα του επιπέδου. Τότε,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 u_2^3 / t^2 (u_1^2 + u_2^2)}{t} \\ &= \frac{u_2^3}{u_1^2 + u_2^2} \\ &= u_2^3. \quad (\|\mathbf{u}\|_2^2 = u_1^2 + u_2^2 = 1) \end{aligned}$$

Δηλαδή  $\eta \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$  υπάρχει σε κάθε κατεύθυνση  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  και ισούται με  $u_2^3$ .

Οι μερικές παράγωγοι της  $f$  στο  $(0, 0)$  είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3/y^2}{y} = 1.$$

Επομένως,

$$\nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) u_2 = u_2.$$

Η ισότητα  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{u}$  ισχύει αν και μόνο αν  $u_2^3 = u_2$ . Δηλαδή  $u_2 = 0, \pm 1$ . Άρα, η ισότητα ισχύει μόνο αν  $\mathbf{u} = \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}$ .

Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο  $(0, 0)$ . Αν η συνάρτηση  $f$  ήταν διαφορίσιμη στο σημείο  $(0, 0)$ , τότε για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{u}$  θα έπρεπε να ισχύει  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{u}$ .

- (β') Έχουμε τις επιφάνειες  $f(x, y, z) = 0$  και  $g(x, y, z) = 1$  όπου οι συναρτήσεις  $f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2$  και  $g(x, y, z) = xyz$  είναι διαφορίσιμες στο  $\mathbb{R}^3$ . Τα διανύσματα

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, -4y_0, 2z_0) \quad \text{και} \quad \nabla g(x_0, y_0, z_0) = (y_0 z_0, x_0 z_0, x_0 y_0)$$

είναι κάθετα στις επιφάνειες  $x^2 - 2y^2 + z^2 = 0$  και  $xyz = 1$  αντίστοιχα, στο σημείο  $(x_0, y_0, z_0)$ .  
Επειδή

$$\begin{aligned}\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \nabla g(x_0, y_0, z_0) &= (2x_0, -4y_0, 2z_0) \cdot (y_0 z_0, x_0 z_0, x_0 y_0) \\ &= 2x_0 y_0 z_0 - 4x_0 y_0 z_0 + 2x_0 y_0 z_0 = 0,\end{aligned}$$

τα εφαπτόμενα επίπεδα είναι κάθετα μεταξύ τους.

■

**Θέμα 4.** (α') Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις  $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι κλάσης  $C^1$  και τέτοιες ώστε

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{για κάθε } x, y \in (0, \infty). \quad (1)$$

Αν  $g(\rho, \theta) := f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ , με  $\rho > 0$  και  $\theta \in (0, \pi/2)$ , να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \frac{\cos \theta}{\rho}$$

και στη συνέχεια να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις  $f$  που ικανοποιούν την (1). (1,5 μον.)

(β') Να βρεθούν τα σημεία της επιφάνειας  $z^2 = xy + 1$  που είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων  $O(0, 0, 0)$ . (1 μον.)

**Λύση.**

(α') Είναι

$$\{x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta\} \Leftrightarrow \left\{ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan \frac{y}{x} \right\}.$$

Από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \rho} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= \frac{x}{\rho \sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{\cos \theta}{\rho}.\end{aligned} \quad (\lambda \circ \gamma \omega \tau \eta \varsigma (1))$$

Επομένως

$$g(\rho, \theta) = \cos \theta \ln \rho + C_1(\theta),$$

όπου η συνάρτηση  $C_1 : (0, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι κλάσης  $C^1$ . Άρα, όλες οι συναρτήσεις  $f$  που ικανοποιούν την (1) είναι

$$f(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \ln(x^2 + y^2) + C_2\left(\frac{y}{x}\right),$$

όπου η συνάρτηση  $C_2 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι κλάσης  $C^1$ .

(β') Η απόσταση  $d$  του σημείου  $(x, y, z)$  της επιφάνειας από την αρχή των αξόνων είναι

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + xy + 1}.$$

Πρέπει λοιπόν να βρούμε το ελάχιστο της συνάρτησης

$$f(x, y) := d^2 = x^2 + y^2 + xy + 1.$$

Είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x(x, y) = 2x + y = 0 \\ f_y(x, y) = 2y + x = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \{(x, y) = (0, 0)\}.$$

Για  $x = y = 0$  είναι  $z = \pm 1$  και επομένως έχουμε τα σημεία  $(0, 0, \pm 1)$  της επιφάνειας. Επειδή  $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$  και  $\Delta = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 2 \cdot 2 - 1 > 0$ , στο σημείο  $(0, 0)$  η  $f$  έχει ελάχιστο. Άρα, τα σημεία  $(0, 0, \pm 1)$  της επιφάνειας είναι αυτά που είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.

■

**Θέμα 5.** Έστω  $\|\mathbf{x}\|_2 = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$  η Ευκλείδια νόρμα του  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$  και έστω  $\|\cdot\|$  μία οποιαδήποτε άλλη νόρμα στον  $\mathbb{R}^n$ .

(α') Αν  $M = \max \{\|\mathbf{e}_i\| : i = 1, \dots, n\}$ , αποδείξτε ότι

$$\|\mathbf{x}\| \leq M\sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2, \quad \text{για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

(1 μον.)

(β') Αν  $f(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}\|$ , αποδείξτε πρώτα ότι η συνάρτηση  $f$  (δηλαδή η νόρμα  $\|\cdot\|$ ) είναι συνεχής στον  $\mathbb{R}^n$  και στη συνέχεια ότι υπάρχει  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  με  $\|\mathbf{z}\|_2 = 1$ , τέτοιο ώστε αν θέσουμε  $m := \|\mathbf{z}\| > 0$  ισχύει η ανισότητα

$$\|\mathbf{x}\| \geq m\|\mathbf{x}\|_2, \quad \text{για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Να συμπεράνετε ότι υπάρχουν  $\alpha, \beta > 0$ , τέτοια ώστε

$$\alpha\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \beta\|\mathbf{x}\|, \quad \text{για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Δηλαδή, στον  $\mathbb{R}^n$  κάθε νόρμα  $\|\cdot\|$  είναι ισοδύναμη με την Ευκλείδια νόρμα. (2 μον.)

**Απόδειξη.**

(α') Για κάθε  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$  είναι

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &= \|x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n\| \\ &\leq |x_1|\|\mathbf{e}_1\| + \dots + |x_n|\|\mathbf{e}_n\| \quad (\text{τριγωνική ανισότητα για τη νόρμα}) \\ &\leq M(|x_1| + \dots + |x_n|) \\ &\leq M(1^2 + \dots + 1^2)^{1/2} (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} \quad (\text{ανισότητα Cauchy-Schwarz}) \\ &= M\sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2. \end{aligned}$$

(β') Για κάθε  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  έχουμε

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| &= \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \\ &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (\text{τριγωνική ανισότητα για τη νόρμα}) \\ &\leq M\sqrt{n}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \quad (\text{από το (α')}) \end{aligned}$$

και επομένως η συνάρτηση  $f$ (δηλαδή η νόρμα  $\|\cdot\|$ ) είναι συνεχής στον  $\mathbb{R}^n$ . (Πράγματι, έστω  $\mathbf{y}$  σταθερό. Αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  επιλέξουμε το  $\delta := 1/M\sqrt{n} > 0$ , τότε για κάθε  $\mathbf{x}$  με  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 < \delta$  είναι  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$ .) Επειδή η σφαρική επιφάνεια

$$S(\mathbf{0}, 1) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}$$

είναι συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) σύνολο στον  $\mathbb{R}^n$ , η συνεχής συνάρτηση  $f$  παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο  $S(\mathbf{0}, 1)$ , έστω στο  $\mathbf{z} \in S(\mathbf{0}, 1)$ . Θέτουμε  $m := \|\mathbf{z}\| > 0$  (είναι  $m > 0$  επειδή  $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ ). Τότε, για κάθε  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  έχουμε

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &= \|\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2\| \cdot \|\mathbf{x}\|_2 \\ &\geq m\|\mathbf{x}\|_2. \end{aligned} \quad \begin{array}{l} (\text{ιδιότητα της νόρμας}) \\ (\text{το } \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2 \in S(\mathbf{0}, 1)) \end{array}$$

Επομένως,  $\|\mathbf{x}\| \geq m\|\mathbf{x}\|_2$  για κάθε  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , όπου  $m > 0$ .

Τέλος, αν πάρουμε το  $\alpha := 1/M\sqrt{n} > 0$  και το  $\beta := 1/m > 0$ , τότε

$$\alpha\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \beta\|\mathbf{x}\|, \quad \text{για κάθε } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

■

---

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες