



ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Μαθηματική Ανάλυση II
14-06-2010

1. **Θέμα 1.** Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $(f_n)_n$ μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων με $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, που συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση στο A .
- (ii) Να δείξετε ότι για κάθε ακολουθία $(x_n)_n$ σημείων του A , με $x_n \rightarrow x_0 \in A$, ισχύει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x_0)$.
- (iii) Να εξετάσετε αν η ακολουθία $(f_n)_n$, τέτοια ώστε

$$f_n(x) = \frac{n^3 x}{1 + n^4 x^2}, \quad x \in [0, 1]$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

2. ~~Θέμα 2.~~ (α) Δίνεται η δυναμοσειρά,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 3^n} (x+2)^n.$$

Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης. *απόλυτη σύγκλιση*

(β) (i) Να αναπτύξετε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x)$ σε σειρά Taylor στο διάστημα $(-1, 1]$.

(ii) Να αναπτύξετε σε σειρά Maclaurin την συνάρτηση, $f(x) = x^2 \cos^3 5x$. *α. ε. σ. για $x \rightarrow 0$ (2 μ. π. α. σ.)*

3. ~~Θέμα 3.~~ (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, όπου

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

είναι συνεχής στο σημείο $(0, 0)$.

(ii) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$\vec{F}(x, y, z) = xy^2 \vec{i} + 2x^2 yz \vec{j} - 3yz^2 \vec{k}.$$

Να βρείτε $\text{grad}(\text{div} \vec{F})$, $\text{div}(\text{Curl} \vec{F})$.

4. ~~Θέμα 4.~~ (i) Να βρεθεί ο τύπος Taylor μέχρι και τους όρους δεύτερης τάξης για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, όπου

$$f(x, y) = \frac{1}{xy}$$

σε μία περιοχή του σημείου $(1, 1)$.

(ii) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y, z) = xyz$. Να βρείτε την κατευθυνόμενη παράγωγο της f στο σημείο $(1, 1, 1)$, κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{v} = \text{grad} f$. *ισοδύναμο διάνυσμα*

(iii) Να προσδιορίσετε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy + 3yz + 3zx.$$