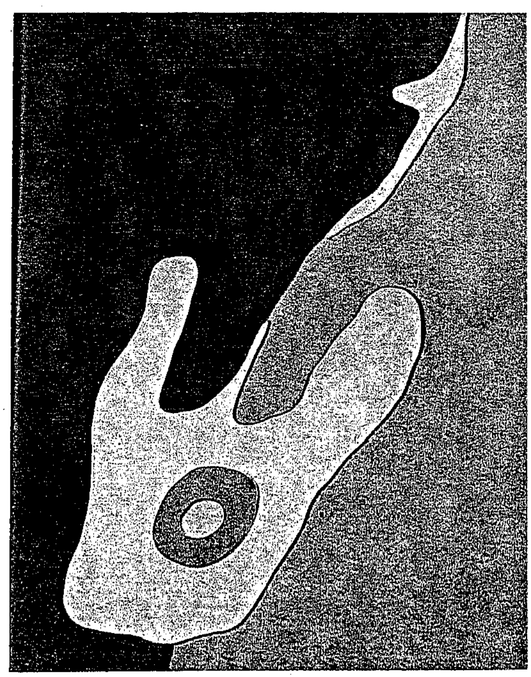
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Τομέας Μαθηματικών

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Καλλιόπης Π. Παυλοπούλου

Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών



Ιούνιος 2008

Εξώφυλλο: Άρπ, Διαμόρφωση, 1928

Πρόλογος

Προσπαθώντας να δώσουμε μια γενική ιδέα για το μάθημα της Διδακτικής σκεφτήκαμε ότι θα ήταν σκόπιμο να παρουσιάσουμε, εκτός από το περιεχόμενο του βιβλίου, και ένα μικρό δείγμα από κάποιες σύγχρονες έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών για να γίνει πιο συγκεκριμένο το αντικείμενο με το οποίο ασχολείται και πώς εξάγει τα συμπεράσματά της.

Η πρώτη έρευνα αναφέρεται στη δυσκολία επίλυσης προβλημάτων η οποία εστιάζεται στη μετάβαση από την αναπαράσταση στη φυσική γλώσσα στην αναπαράσταση στη συμβολική γραφή. Στο κείμενο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα ενός ερωτηματολογίου τα οποία επιβεβαιώνουν αυτή τη δυσκολία. Στη δεύτερη έρευνα παρουσιάζεται ένα λεκτικό πρόβλημα, στην εκφώνηση του οποίου δε συναντάμε αριθμούς. Το ενδιαφέρον σε αυτή την έρευνα είναι ότι δεν εστιάζεται μόνο στον αριθμό των σωστών απαντήσεων, αλλά και στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές παρουσίασαν τις λύσεις τους. Τέλος, προσπαθεί να δώσει και μια ερμηνεία στα φαινόμενα τα οποία παρατηρήθηκαν, με τη βοήθεια συνεντεύξεων και μιας επιτόπιας παρατήρησης της τάξης.

Η διδάσκουσα του μαθήματος της Διδακτικής των Μαθηματικών

Κ. Παυλοπούλου

ΕΝΑ ΒΑΣΙΚΟ ΒΗΜΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ: Η ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΗ ΦΥΣΙΚΗ ΓΛΩΣΣΑ ΣΤΗ ΣΥΜΒΟΛΙΚΗ ΓΡΑΦΗ

Εισαγωγή

Η διαδικασία επίλυσης μιας πρωτοβάθμιας εξίσωσης ή ανίσωσης είναι μια αλγοριθμική διαδικασία η οποία αποτελεί μια επεξεργασία μέσα στο ίδιο σύστημα αναπαράστασης το συμβολικό (ή συμβολικής γραφής) και συνήθως κατανοείται χωρίς δυσκολία από τους μαθητές. Αντίθετα, η διαδικασία δημιουργίας της κατάλληλης εξίσωσης η οποία θα οδηγήσει στη λύση ενός προβλήματος συγκαταλέγεται σε μια από τις πιο δύσκολες διαδικασίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στο σχολείο. Οι περισσότεροι μαθητές στη «θέα» μιας εκφώνησης προβλήματος αισθάνονται φόβο ή αμηχανία δηλώνοντας τις πιο πολλές φορές: «Δεν ξέρω να λύνω προβλήματα.». Η άμεση συνέπεια είναι είτε να μη διαβάζουν την εκφώνηση είτε να την διαβάζουν ταχύτατα. Και σε περίπτωση που καταπιαστούν με το πρόβλημα, *επικεντρώνονται στους αριθμούς που δίνονται σε συμβολική γραφή* μέσα στην εκφώνηση και προσπαθούν, συνδυάζοντάς τους με σύμβολα βασικών πράξεων και εισάγοντας συνήθως αυθαίρετα μια μεταβλητή x (η οποία μπορεί να παριστάνει και δυο διαφορετικά αντικείμενα της εκφώνησης), να κατασκευάσουν μια εξίσωση. Ιδιαίτερα, όταν όλα τα δεδομένα της εκφώνησης δοθούν αποκλειστικά σε φυσική γλώσσα ή όταν κάποια αριθμητικά δεδομένα δεν δίνονται με εμφανή τρόπο στην εκφώνηση, τότε οι δυσκολίες των μαθητών γίνονται ακόμα περισσότερες (βλ. Παυλοπούλου, Πατρώνης, 2002). Αυτή τη διάθεση των μαθητών την έχουμε συναντήσει και σε άλλες έρευνες και περιγράφεται με τη βοήθεια του συνοπτικού όρου «number consideration strategies» (βλ. Garofalo, 1988) που στα ελληνικά θα μπορούσαμε κάπως ελεύθερα να το μεταφράσουμε «*κοίταξε τους αριθμούς, αυτοί θα σου πουν τι να κάνεις*».

Κατά την επίλυση ενός προβλήματος, αυτό που κυρίως ζητείται από τους μαθητές είναι η πραγματοποίηση της μετάβασης από μια αναπαράσταση στη φυσική γλώσσα, στην αντίστοιχη αναπαράσταση στη συμβολική γραφή. Το στάδιο αυτό δεν είναι άλλο από τη «μετάφραση» των δοσμένων πληροφοριών της εκφώνησης σε σύμβολα και μαθηματικές σχέσεις. Οι σχέσεις αυτές θα πρέπει να περιγράφουν με ακρίβεια, συνέπεια και πληρότητα όλα τα στοιχεία που δίνονται στην εκφώνηση του προβλήματος. Αυτή η διαδικασία παρουσιάζει πολλές ιδιαιτερότητες καθώς βάζει σε αντιστοιχία δύο γλώσσες που έχουν διαφορετικούς κανόνες σύνταξης και διαφορετικές δυνατότητες περιγραφής των αντικειμένων (βλ. Δαγδιλέλης, Παυλοπούλου, Τρίγγα, 1998 και Duval, 1995). Η φυσική γλώσσα διαθέτει μεγάλη ποικιλία ουσιαστικών, επιθέτων και ρημάτων με τη βοήθεια των οποίων μπορεί να περιγράψει με πολλούς διαφορετικούς τρόπους το νόημα μιας φράσης, η οποία όμως να αντιστοιχεί στην ίδια έκφραση στη συμβολική γραφή. Ας δώσουμε ένα πολύ απλό παράδειγμα: «Το τριπλάσιο ενός αριθμού», «Το γινόμενο ενός αριθμού με το 3», «Ένας αριθμός πολλαπλασιασμένος με το 3». Όλες οι παραπάνω φράσεις αντιστοιχούν στην ίδια έκφραση γραμμένη στη συμβολική γραφή: «3x».

Στην παράγραφο 5.7 του βιβλίου «Διδακτική: Μέθοδοι κι Εφαρμογές» των Β. Δαγδιλέλη, Κ. Παυλοπούλου, Π. Τρίγγα, 1998, περιγράφουμε αναλυτικά τη δυσκολία της μετάβασης από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή και ειδικότερα το *φαινόμενο της μη εννοιολογικής συνάφειας*. Εδώ θα προσθέσουμε μια ακόμα ιδιαιτερότητα στη μετάβαση από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή: *μια μικρή αλλαγή στην αναπαράσταση στη φυσική γλώσσα μπορεί να αντιστοιχεί σε μια πολλή σημαντική αλλαγή στη συμβολική γραφή*. Για παράδειγμα:

1) Το πενταπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 3.

$$5x \quad + \quad 3$$

Προσθέτοντας ένα μόνο γράμμα, το οποίο μπορεί να μην παρατηρηθεί καθόλου από μια βιαστική ανάγνωση του κειμένου, προκύπτει η φράση:

2) Το πενταπλάσιο ενός αριθμού αυξημένου κατά 3.

$$5 \;.\; (x+3)$$

Στην πρώτη πρόταση υπάρχει προφανώς εννοιολογική συνάφεια μεταξύ των δύο αναπαραστάσεων, ενώ στη δεύτερη δεν υπάρχει λόγω αντιστροφής του αντικειμένου αναφοράς. Οι μαθητές δηλαδή θεωρούν τη λέξη «αριθμός» ως αντικείμενο αναφοράς της λέξης πενταπλάσιο αντί του «αριθμού αυξημένου κατά 3» (βλ. Δαγδιλέλης, Παυλοπούλου, Τρίγγα, 1998).

Το ερωτηματολόγιο

Για να μπορέσουμε να επισημάνουμε τις δυσκολίες της μετάβασης από τη μία αναπαράσταση στην άλλη και ειδικότερα της μη εννοιολογικής συνάφειας, κατασκευάσαμε ένα ερωτηματολόγιο το οποίο περιλάμβανε:

Α) Ερωτήματα όπου ήταν δοσμένες αναπαραστάσεις σε συμβολική γραφή και ζητήθηκε η αντίστοιχη αναπαράσταση σε φυσική γλώσσα.

Β) Ερωτήματα όπου δόθηκαν αναπαραστάσεις σε φυσική γλώσσα και ζητήθηκε η αντίστοιχη αναπαράσταση σε συμβολική γραφή, δηλαδή η αντίστροφη διαδικασία από την προηγούμενη. Σε αυτή την ομάδα ερωτημάτων συμπεριλάβαμε και προτάσεις που είχαμε εξάγει από εκφωνήσεις προβλημάτων, δηλαδή η μεταβλητή x δεν αντιστοιχούσε σε ένα τυχαίο αριθμό, αλλά στην ηλικία ενός ανθρώπου ή σε ένα χρηματικό ποσό, κ.α.

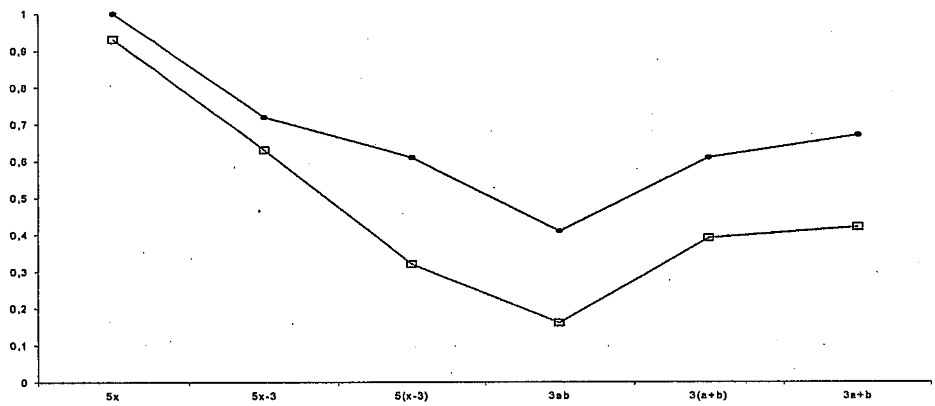
Αποτελέσματα ερωτηματολογίου

Το ερωτηματολόγιο μοιράστηκε σε 57 μαθητές της Α' γυμνασίου και 61 μαθητές της Β' γυμνασίου. Τα αποτελέσματα θα παρουσιαστούν σε τρεις ομάδες.

Α) Το πέρασμα από τη συμβολική γραφή στη φυσική γλώσσα.

Πίνακας 1: Από τη συμβολική γραφή στη φυσική γλώσσα.

Συμβολική γραφή	**Φυσική γλώσσα**	**Τάξη Α'**	**Τάξη Β'**
5x	Το πενταπλάσιο ενός αριθμού.	93%	100%
5x-3	Το πενταπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά 3.	63%	72%
5(x-3)	Το πενταπλάσιο της διαφοράς του 3 από έναν αριθμό.	32%	61%
3ab	Το τριπλάσιο του γινομένου δύο αριθμών.	16%	41%
3(a+b)	Το τριπλάσιο του αθροίσματος δύο αριθμών.	39%	61%
3a+b	Το άθροισμα του τριπλάσιου ενός αριθμού και ενός άλλου.	42%	67%



Διάγραμμα 1: Από τη συμβολική γραφή στη φυσική γλώσσα.

Παρατηρούμε ότι οι απλές συμβολικές εκφράσεις με αριθμούς, σύμβολα βασικών πράξεων και μια μόνο μεταβλητή (5x, 5x-3) μετατρέπονται επιτυχώς από όλους σχεδόν τους μαθητές στην αντίστοιχη αναπαράσταση στη φυσική γλώσσα.

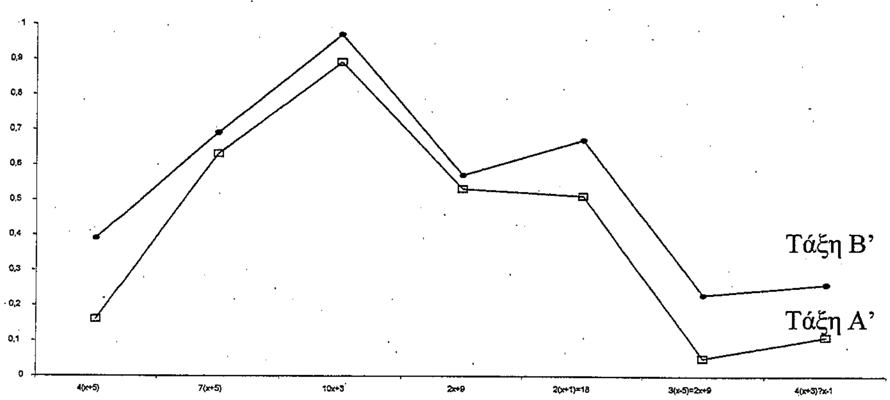
Οι δυσκολίες αυξάνουν όταν εμφανίζονται παρενθέσεις στη συμβολική έκφραση. Οι μαθητές ενώ βλέπουν *τις παρενθέσεις δεν τις εισάγουν λεκτικά στην αντίστοιχη αναπαράσταση στη φυσική γλώσσα*, με αποτέλεσμα οι εκφράσεις 5x-3 και 5(x-3) να αντιστοιχούν, σύμφωνα με τις απαντήσεις των μαθητών, στην ίδια λεκτική αναπαράσταση. Το ίδιο παρατηρείται και στις εκφράσεις 3a+b και 3(a+b) όπου υπάρχουν δύο μεταβλητές.

Τέλος, στο τέταρτο ερώτημα (3ab) οι μαθητές δίνοντας έμφαση στην ύπαρξη της δεύτερης μεταβλητής ξεχνούν να περιγράψουν τη σχέση που τις συνδέει, δηλαδή το γινόμενό τους. Η συνηθέστερη λανθασμένη απάντηση είναι «Το τριπλάσιο δύο αριθμών».

B) Το αντίστροφο πέρασμα: από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή.

Πίνακας 2: Από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή.

Φυσική γλώσσα	**Συμβολική γραφή**	**Τάξη Α'**	**Τάξη Β'**
Το τετραπλάσιο ενός αριθμού αυξημένου κατά 5.	4(x+5)	16%	39%
Το επταπλάσιο του αθροίσματος ενός αριθμού με το 5.	7(x+5)	63%	69%
Το δεκαπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 3.	10x+3	89%	97%
Το άθροισμα του διπλασίου ενός αριθμού με το 9.	2x+9	53%	57%
Το διπλάσιο του αθροίσματος ενός αριθμού με το 1 είναι ίσο με 18.	2(x+1)=18	51%	67%
Το τριπλάσιο ενός αριθμού μειωμένου κατά 5 είναι ίσο με το άθροισμα του διπλασίου του αυξημένο κατά 9.	3(x-5)=2x+9	5%	23%
Το τετραπλάσιο ενός αριθμού αυξημένου κατά 3 είναι μεγαλύτερο ή ίσο από τον αριθμό αυτό μειωμένο κατά 1.	4(x+3)≥x-1	11%	26%



Διάγραμμα 2: Από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή.

Το ερώτημα με το υψηλότερο ποσοστό επιτυχίας είναι το τρίτο, δηλαδή η έκφραση «Το δεκαπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 3». Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι υπάρχει εννοιολογική συνάφεια μεταξύ των δύο αναπαραστάσεων όπως φαίνεται παρακάτω:

«Το δεκαπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 3»

$$10x \quad + \quad 3$$

Αντίθετα, στην περίπτωση του επόμενου ερωτήματος «Το άθροισμα του διπλασίου ενός αριθμού με το 9», δεν υπάρχει εννοιολογική συνάφεια, αφού οι μονάδες πληροφορίας δεν ακολουθούν την ίδια σειρά και στις δύο αναπαραστάσεις:

«Το άθροισμα του διπλασίου ενός αριθμού με το 9»

$$2x \quad + \quad 9$$

Η ύπαρξη του φαινόμενου της μη εννοιολογικής συνάφειας οδηγεί σε μια σημαντική πτώση των ποσοστών επιτυχίας κατά 40%!

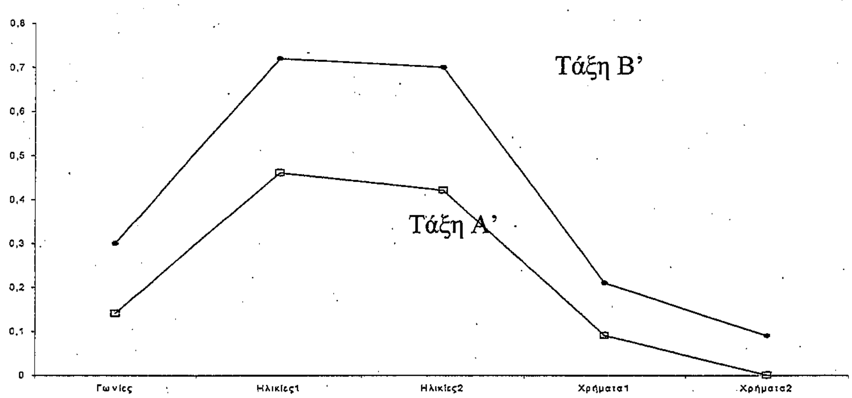
Παρατηρούμε επίσης μεγάλη διαφορά στα ποσοστά επιτυχίας μεταξύ των δύο πρώτων ερωτημάτων αυτής της ομάδας. Η δυσκολία οφείλεται κι εδώ στο γεγονός ότι οι δύο αναπαραστάσεις δεν είναι εννοιολογικά συναφείς λόγω αντιστροφής του αντικειμένου αναφοράς, όπως αναλύσαμε στην παράγραφο 5.7 του βιβλίου.

Στα τρία τελευταία ερωτήματα εισάγεται και η λεκτική αναπαράσταση των συμβόλων « = και ≥ » χωρίς όμως να δημιουργηθεί επιπρόσθετη δυσκολία στους μαθητές. Η ύπαρξη ή μη εννοιολογικής συνάφειας είναι που διαμορφώνει τα ποσοστά επιτυχίας. Ιδιαίτερα μεγάλη πτώση των ποσοστών επιτυχίας παρατηρείται στο προτελευταίο ερώτημα (επιτυχία: 5% για την Α' τάξη και 23% για τη Β' τάξη) όπου και οι δύο φράσεις που συνδέονται με τη σχέση της ισότητας παρουσιάζουν μη εννοιολογική συνάφεια με τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις στη συμβολική γραφή.

Γ) Όταν η μεταβλητή παριστάνει ένα συγκεκριμένο αντικείμενο

Πίνακας 3: Από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή.

Φυσική γλώσσα	**Συμβολική γραφή**	**Τάξη Α'**	**Τάξη Β'**
Γωνίες: Το άθροισμα του τριπλάσιου μιας γωνίας και του διπλάσιου μιας άλλης είναι μικρότερο από το διπλάσιο του αθροίσματος της πρώτης με 30.	3x+2y<2(x+30)	14%	30%
Ηλικίες1: Το άθροισμα των ηλικιών δυο αδελφών είναι 27.	a+b=27	46%	72%
Ηλικίες2: Αν διπλασιάσουμε την ηλικία του μικρότερου, το άθροισμα των ηλικιών τους θα είναι 38.	2a+b=38	42%	70%
Χρήματα1: Αν ο Γιώργος δώσει στον Κώστα 100 δρχ., θα έχουν το ίδιο ποσό χρημάτων και οι δύο.	g-100=k+100	9%	21%
Χρήματα2: Αν ο Κώστας δώσει στο Γιώργο 100δρχ., ο Γιώργος θα έχει διπλάσια χρήματα από τον Κώστα.	g+100=2(k-100)	0%	9%



Διάγραμμα 3: Από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή.

Στις εκφωνήσεις που σχετίζονται με τις ηλικίες παρατηρούνται τα υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας και κυρίως στο δεύτερο ερώτημα όπου δεν εμφανίζεται παρένθεση και υπάρχει εννοιολογική συνάφεια μεταξύ των αναπαραστάσεων.

Στην πρώτη εκφώνηση (γωνίες) δεν υπάρχει εννοιολογική συνάφεια παρά μόνο στο πρώτο μέλος της σχέσης διότι οι μονάδες πληροφορίας δεν ακολουθούν την ίδια σειρά.

Στις δύο τελευταίες εκφωνήσεις είχαμε τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας. Στο πρόβλημα «Χρήματα1» το πρώτο μέλος της σχέσης μπορούσε να προκύψει άμεσα από την εκφώνηση στη φυσική γλώσσα:

«Αν ο Γιώργος δώσει 100 δρχ.»

g – 100

Για την κατασκευή όμως του δεύτερου μέλους της ισότητας *δεν δίνεται αναλυτικά στην εκφώνηση* η αντίστοιχη λεκτική αναπαράσταση για να γίνει η μετάβαση από το μαθητή. Ο ίδιος ο μαθητής πρέπει να κάνει το ενδιάμεσο βήμα λέγοντας ότι «ο Κώστας στην τελική φάση θα έχει 100 δρχ. περισσότερες από αυτές που είχε προηγουμένως». Σε αυτή την περίπτωση, η μεταβλητή k ενώ έχει οριστεί ως τα χρήματα που είχε ο Κώστας στην αρχή (πριν τη συναλλαγή) τις πιο πολλές φορές καταλήγει να εκφράζει τα χρήματα που είχε ο Κώστας μετά από τη συναλλαγή, φτάνοντας έτσι στην εξίσωση: g-100=k. Παρόμοιες είναι και οι δυσκολίες και τα λάθη στην τελευταία εκφώνηση.

Τέλος, παρατηρήσαμε ότι πολλοί μαθητές δεν διέκριναν τις δύο μεταβλητές, δηλαδή χρησιμοποίησαν *το ίδιο γράμμα για να συμβολίσουν δυο διαφορετικά αντικείμενα της εκφώνησης*. Έτσι, η απάντηση που δόθηκε από τους μαθητές περιλάμβανε μόνο μια αντί δυο μεταβλητές.

Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου φανερώνουν την ιδιαίτερη δυσκολία της μετάβασης από ένα κείμενο γραμμένο στη φυσική γλώσσα προς την αντίστοιχη μαθηματική έκφραση, δίνοντας έμφαση κυρίως στα παρακάτω στοιχεία:

1) Απλές εκφράσεις με αριθμούς, σύμβολα βασικών πράξεων, μια μεταβλητή και χωρίς παρενθέσεις δεν δημιουργούν ιδιαίτερες δυσκολίες.

2) Η εμφάνιση παρενθέσεων αυξάνει τη δυσκολία της μετάβασης.

3) Όταν η εκφώνηση περιλαμβάνει στοιχεία που οδηγούν στη χρήση δύο μεταβλητών, πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να τις διακρίνουν με αποτέλεσμα η αντίστοιχη συμβολική έκφραση να περιλαμβάνει μια μεταβλητή.

4) Όταν η αναπαράσταση στη φυσική γλώσσα και η αντίστοιχη αναπαράσταση στη συμβολική γραφή δεν παρουσιάζουν εννοιολογική συνάφεια τα ποσοστά επιτυχίας μειώνονται σημαντικά.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις μας δίνουν αρκετούς προβληματισμούς ως προς την ιδιαίτερη σημασία που χρειάζεται να δώσουμε στο πώς «χτίζουμε» την εκφώνηση ενός προβλήματος καθώς επίσης και ως προς την οργάνωση μιας συστηματικής διδασκαλίας της μετάβασης αναπαραστάσεων από τη φυσική στη συμβολική γλώσσα.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Δαγδιλέλης, Β., Παυλοπούλου, Κ., Τρίγγα Π. (1998). *Διδακτική: Μέθοδοι και Εφαρμογές*, Εκδ. Μπένου, Αθήνα.

Didierjean, G., Duval, R. (1997). A propos de charades dont la solution est un système d'équations à deux inconnues, *Petit x*, no 44, pp. 35-48.

Duval, R. (1988). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol.1, pp.7-25, Strasbourg.

Garofalo, J. (1992). Number-consideration strategies students use to solve word problems, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 14, 2, 37-50.

Pavlopoulou, K. (1998). The passage from the register of natural language to the symbolic register in the rasolution of a problem, *Proceedings of the 4th Hellenic – European Conference on Computer Mathematics and its Applications* (HERCMA'98), Athens University of economics and Business, 1998.

Παυλοπούλου, Κ., Πατρώνης Τ. (2002). Μονώνυμα από χρυσάφι: Οικειοποίηση συμβολικών μορφών μέσα από ένα λεκτικό πρόβλημα, *Η διδασκαλία της γλώσσας και των μαθηματικών – Εκπαίδευση γλωσσικών μειονοτήτων*, Εκδ. Παρατηρητής, Θεσσαλονίκη.

ΟΙΚΕΙΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΜΒΟΛΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΕΝΑ ΛΕΚΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Εισαγωγή

Ένα λεκτικό μαθηματικό πρόβλημα, που προτάθηκε σε μια πολυπολιτισμική τάξη Α΄ γυμνασίου (παιδιά 12-13 ετών), οδήγησε τους μαθητές σε μια ποικιλία συμβολικών εκφράσεων των λύσεων. Πολλές από τις συμβολικές μορφές που χρησιμοποίησαν τα παιδιά παρουσιάζουν μια χαρακτηριστική ομοιότητα με αριθμητικά μονώνυμα και πολυώνυμα. Το πρόβλημα είναι το ακόλουθο:

Μια δασκάλα έπαιξε το παρακάτω παιχνίδι με τους μαθητές της: Κάθε μαθητής θα άλλαζε ένα κατοστάρικο της δασκάλας με μικρότερα κέρματα, χωρίς να χρησιμοποιεί καθόλου κέρματα της μιας δραχμής. Πόσα παιδιά θα μπορούσαν να παίξουν αυτό το παιχνίδι, αν κάθε παιδί θα έπρεπε να αλλάξει το κατοστάρικο της δασκάλας με διαφορετικό τρόπο από τα υπόλοιπα παιδιά;

Το πρόβλημα αυτό θεωρείται οικείο ως προς το πλαίσιο του κοινωνικού περιβάλλοντος των παιδιών, αλλά μη πρακτικού χαρακτήρα. Δεν είναι ωστόσο οικείο ως προς το πλαίσιο της σχολικής πρακτικής της τάξης τους και, επιπλέον, για να δοθεί η τελική απάντηση χρειάζονται πολλές επιμέρους λύσεις. Προτείνοντας λοιπόν στα παιδιά ένα τέτοιο πρόβλημα, δεν είναι δυνατό να περιμένει κανείς πολύ εντυπωσιακά αποτελέσματα από μαθηματικής πλευράς. Θα πρέπει μάλλον να αρκεστεί στην υπομονετική παρατήρηση στρατηγικών και τρόπων έκφρασης που φαινομενικά δεν διαφέρουν από κοινοτοπίες, προκειμένου να του γίνουν σταδιακά φανερές κάποιες καινούργιες, ή μέχρι τώρα παραγνωρισμένες, παράμετροι της παιδικής «μαθηματικής» δραστηριότητας (μέσα και έξω από το σχολείο). Αυτές οι παράμετροι είναι που κυρίως μας ενδιαφέρουν εδώ, σε σχέση με το ρόλο της συμβολικής «γλώσσας» στα Μαθηματικά, και μάλιστα σε παιδιά που μπορεί να μην έχουν τα Ελληνικά ως μητρική γλώσσα.

Συλλογή εμπειρικών δεδομένων

Το πρόβλημα, με εκφώνηση ακριβώς όπως διατυπώθηκε παραπάνω, δόθηκε σε όλους (συνολικά 69) τους μαθητές της Α΄ τάξης ενός γυμνασίου του «B-CITY», όπως θα ονομάζουμε στο εξής την ειδική περιοχή της Αθήνας που επιλέξαμε για την έρευνα. Επιλέξαμε την περιοχή αυτή όχι εξαιτίας κάποιας σχετικής φήμης της, αλλά εξαιτίας της ειδικής -και σχετικά σταθερής από χρόνια- πολιτισμικής της σύνθεσης. Το πρόβλημα μοίρασαν (σε ειδικό στέλεχος) στα παιδιά οι καθηγητές που δίδασκαν στα πέντε τμήματα της τάξης, χωρίς τη δική μας παρουσία και χωρίς καμία διευκρίνιση, ούτε για το πρόβλημα, ούτε για τους ειδικότερους λόγους της έρευνας. Ο τρόπος αυτός της «παρουσίασης» του προβλήματος είχε κάποιες συνέπειες, όπως θα δούμε παρακάτω.

Με σκοπό να ανιχνεύσουμε κάποιες ιδιαίτερες συνήθειες και στάσεις των μαθητών απέναντι σε τέτοιου είδους προβλήματα, περιλάβαμε στο στέλεχος που μοιράσαμε και την ερώτηση: «*Σε τι διαφέρει αυτό το πρόβλημα από εκείνα που λύνετε συνήθως στο σχολείο;*».

Ύστερα από τη συγκέντρωση και μια πρώτη ανάλυση των γραπτών, επισκεφθήκαμε το σχολείο για μια επιτόπια παρατήρηση της τάξης (που ήταν ήδη η Β΄ Γυμνασίου). Παρατηρήσαμε τα μαθήματα των Μαθηματικών και των Νέων Ελληνικών και πήραμε επιτόπου συνεντεύξεις από ομάδες μαθητών και από τρεις καθηγητές της τάξης.

Από τα 69 γραπτά των μαθητών του B-CITY υπάρχουν 13 χωρίς καμία λύση και 11 με μια εμφανή παρανόηση της εκφώνησης του προβλήματος. Η ερώτηση: «Πόσα παιδιά θα μπορούσαν να παίξουν αυτό το παιχνίδι, αν κάθε παιδί θα έπρεπε να αλλάξει το κατοστάρικο της δασκάλας με διαφορετικό τρόπο από τα υπόλοιπα παιδιά;», είναι κάπως πυκνά διατυπωμένη και είναι εύκολο να παρερμηνευτεί από τα παιδιά. Διαβάζοντας κανείς βιαστικά αυτή την ερώτηση και μη δίνοντας σημασία σε ορισμένες λέξεις μπορεί να νομίσει ότι το κατοστάρικο της δασκάλας δεν το αλλάζει ένα παιδί κάθε φορά, αλλά περισσότερα, και μάλιστα καθένα παιδί συνεισφέρει εξίσου! Έτσι η φράση «πόσα παιδιά θα μπορούσαν να παίξουν αυτό το παιχνίδι» ερμηνεύεται ως ταυτόχρονη συμμετοχή των παιδιών σε ένα διαφορετικό παιχνίδι, που συνίσταται στην απλή μοιρασιά (διαίρεση) ενός κατοστάρικου σε ίσα μερίδια. Οι απαντήσεις που φαίνονται παρακάτω ανταποκρίνονται ακριβώς σε μια τέτοια ερμηνεία (και άλλες πέντε απαντήσεις διαφέρουν ελάχιστα από αυτές).

«Μπορεί να δώσει κάθε παιδί από ένα πενηντάρικο». [Νο3]
«Θα έδινα από 50 δρχ.» [Νο62]
«2 παιδιά από 50 δρχ.» [Νο58]
«Θα έπαιζαν 5 παιδιά. Κάθε παιδί 20 δρχ.» [Νο55]
«Μπορούσαν άνετα να δώσουν 5 παιδιά από ένα 20. Επίσης 2 παιδιά από ένα 50.» [Νο56]
«Με 10 δρχ. 10 παιδιά» [Νο57]

Υπάρχει, όμως, στα 13 παιδιά που δεν έδωσαν καμία λύση και στα 11 με την πιο πάνω παρανόηση της εκφώνησης του προβλήματος (δηλαδή σε σύνολο 24 μαθητών) μια εκπληκτική ομοιογένεια, όσο αφορά τις απαντήσεις στην ερώτηση: «Σε τι διαφέρει αυτό το πρόβλημα από εκείνα που λύνετε συνήθως στο σχολείο;». Στην ερώτηση αυτή, μόνο ένα από τα παραπάνω 24 παιδιά απαντάει:

«Ηταν πιο δύσκολο και πιο ωραίο. Δεν το έλυσα γιατί δεν μπόρεσα.».

Τα υπόλοιπα 23 παιδιά δίνουν απαντήσεις που δεν διαφέρουν ουσιαστικά από τις παρακάτω:

«Το πρόβλημα δεν μπορούμε να το λύσουμε γιατί έχει λόγια και όχι αριθμούς.».
«Είναι θεωρητικό και δεν έχει αριθμούς. Είναι εκτός πραγματικότητας [αν συσχετιστεί με αυτά] που κάνουμε στο σχολείο.»

Απαντήσεις όπως οι τελευταίες είναι γνωστές στη βιβλιογραφία, όπου έχουν περιγραφεί με τη βοήθεια του αρκετά επιτυχημένου συνοπτικού όρου «number consideration strategies» (βλ. σχετ. [1], [2]). Αλλά, μια τέτοια περιγραφή είναι μάλλον πολύ γενική και αφήνει ανοιχτό το ζήτημα της *ερμηνείας* της συγκεκριμένης συμπεριφοράς –μιας τυπικής συμπεριφοράς που μπορεί να έχει διαφορετικές αιτίες κάθε φορά που εκφράζεται από τα παιδιά.

Τα εμπειρικά μας δεδομένα παρουσιάζουν στο σημείο αυτό, μια ιδιομορφία που ίσως δεν είναι τυχαία: στη συντριπτική τους πλειοψηφία (22 στους 24) οι μαθητές που δεν έδωσαν καμία λύση ή παρανόησαν την εκφώνηση του προβλήματος ανήκουν σε ένα και μόνο τμήμα από τα πέντε της Α΄ τάξης του γυμνασίου του B-CITY. Στο τμήμα αυτό (που στο εξής θα αναφέρεται ως «A_0») φαίνεται ότι επικράτησε μια αρνητική προθετικότητα απέναντι στο συγκεκριμένο πρόβλημα και την έρευνά μας εν γένει. Η ομοιογένεια των πιο πάνω απαντήσεων εντοπίζεται εδώ, επομένως, όχι απλά στη μορφή τους, αλλά κυρίως στην ιδιόμορφη σχέση που φαίνεται να υπάρχει, ανάμεσα στον *τρόπο που δόθηκε το πρόβλημα στην τάξη*, στη *μορφή του προβλήματος*, και στη *μορφή των απαντήσεων και των λύσεων* (όταν υπάρχουν).

Η παρακάτω συνέντευξη, που πήραμε κατά την επίσκεψή μας στο σχολείο του B-CITY, από την <u>Α</u> και τον <u>Β</u> (τσιγγάνο), μαθητές του τμήματος A_0, φωτίζει μερικές πτυχές της παραπάνω ιδιόμορφης σχέσης και δείχνει το είδος της παρανόησης της εκφώνησης:

> Ε (ερευνητής): Γράψατε, παιδιά, ότι το πρόβλημα δεν μπορούσατε να το λύσετε «γιατί έχει λόγια και όχι αριθμούς». Τι εννοούσατε;
>
> <u>Α</u>: Άμα είχε αριθμούς, θα μας φαινότανε πιο εύκολο.
>
> <u>Β</u>: <u>Άμα μας έδειχνε πόσα παιδιά ήτανε, τότε θα μπορούσαμε να πούμε</u> [π.χ.] <u>αν ήταν πέντε παιδιά, καθένα θα έδινε από ένα εικοσάρικο.</u>
>
> ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: Όταν ο καθηγητής σας έδωσε το πρόβλημα, τι σκεφτήκατε;
>
> <u>Α</u>: Ήτανε πολύ … <u>αυθόρμητο</u>.
>
> ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: Δηλαδή;
>
> <u>Α</u>: <u>Προτιμάω να με προετοιμάζουνε πρώτα.</u>
>
> ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: Αν αυτό το πρόβλημα το έβλεπες σε ένα περιοδικό, θα ήταν διαφορετικά;
>
> <u>Α</u>: Κύριε, αν ήταν σε περιοδικό, θα το παίρναμε σπίτι μας, θα το διαβάζαμε …
>
> <u>Β</u>: Ναι, γιατί έτσι που δόθηκε <u>σε ένα διαγώνισμα,</u> δεν είχαμε χρόνο να το σκεφτούμε … Είχαμε τρακ …
>
> ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: Το είδατε, λοιπόν, σαν ένα διαγώνισμα;
>
> <u>Β</u> (χαμογελώντας): Ναι.
>
> [Οι υπογραμμίσεις δικές μας].

Από τις απαντήσεις της <u>Α</u> βγαίνει ότι και η μορφή του προβλήματος, αλλά (κυρίως) ο τρόπος που δόθηκε, φάνηκε ανοίκειος στα παιδιά του A_0. Δεν μπορεί ξαφνικά κάποιος (οποιοσδήποτε) να ζητάει από τα παιδιά να απαντήσουν σε ο,τιδήποτε, χωρίς να είναι προϊδεασμένα για το ζήτημα αυτό. Ο <u>Β</u> είναι ακόμα πιο διαφωτιστικός, ξεκαθαρίζοντας το πώς είδε το όλο εγχείρημα, αλλά και πώς εξέλαβε το ζητούμενο του συγκεκριμένου προβλήματος: πρόκειται να μοιραστεί ένα κατοστάρικο σε μερίδια τόσα όσα τα παιδιά που παίζουν το παιχνίδι, άρα ο αριθμός τους είναι απαραίτητο να δοθεί, προκειμένου να βρεθεί το κέρμα της συνεισφοράς κάθε παιδιού ως πηλίκο της διαίρεσης.

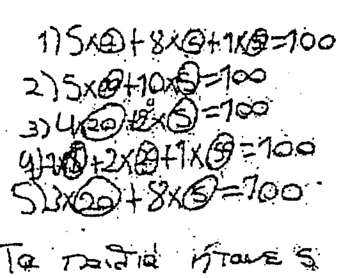
Από τα 11 παιδιά που παρανόησαν την εκφώνηση, μόνο ένα δεν είχε τα Ελληνικά ως μητρική του γλώσσα και ανήκε στην Αθιγγανική γλωσσική μειονότητα. Στο συνολικό μας δείγμα (69 παιδιά) υπήρχαν 12 παιδιά που ανήκαν σε γλωσσικές μειονότητες και όλοι οι υπόλοιποι είχαν ως μητρική γλώσσα τα Ελληνικά. Δεν μπορούμε λοιπόν να ισχυριστούμε ότι το συγκεκριμένο λεκτικό πρόβλημα δημιούργησε, στην περίπτωσή μας, ιδιαίτερες δυσκολίες σε παιδιά που δεν έχουν τα Ελληνικά ως μητρική τους γλώσσα.

Πρόσληψη και συμβολισμός των «δομικών μονάδων» του προβλήματος

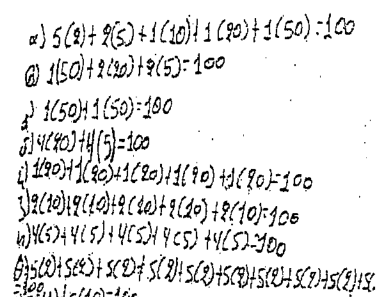
Τα κέρματα που μπορεί να χρησιμοποιηθούν στην αλλαγή του κατοστάρικου (δίφραγκο, τάληρο, δεκάρικο, εικοσάρικο και πενηντάρικο) προσλαμβάνονται από τα παιδιά ως «δομικές μονάδες» του προβλήματος. Πολλά παιδιά επινοούν διάφορους τρόπους για να συμβολίσουν τις δομικές μονάδες (2, 5, 10, 20, 50), κατά τη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος, ώστε να τις ξεχωρίζουν από τους αριθμητικούς συντελεστές που προσδιορίζουν το πλήθος των χρησιμοποιούμενων δομικών μονάδων.

Δομικές μονάδες σε κύκλο ή σε πλαίσιο: Ο συμβολισμός αυτός είναι ο πιο συνηθισμένος και παρατηρείται σε 26 μαθητές (π.χ. Νο13, Νο44).

Χρήση παρενθέσεων: Δύο μόνο φορές συναντάμε αυτό τον συμβολισμό (π.χ. Νο46).

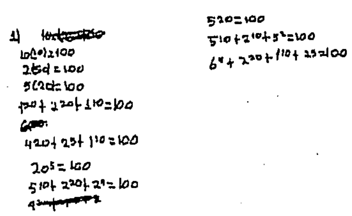


Νο13

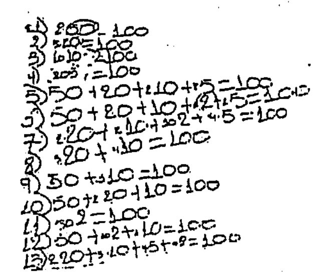


Νο46

Εκθετική μορφή: Είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον να σημειώσουμε τη χρήση «δυνάμεων» για τη διάκριση των δομικών μονάδων. Οι δομικές μονάδες (κέρματα) εμφανίζονται ως «εκθέτες» και στη θέση της «βάσης» είναι ο αριθμός εκείνος που προσδιορίζει το πλήθος των δομικών μονάδων, όπως ο αριθμητικός συντελεστής σε ένα μονώνυμο.



No40: Ξεκινάει χρησιμοποιώντας παρενθέσεις και στη συνέχεια τα κέρματα (δομικές μονάδες) παίρνουν τη μορφή εκθετών.



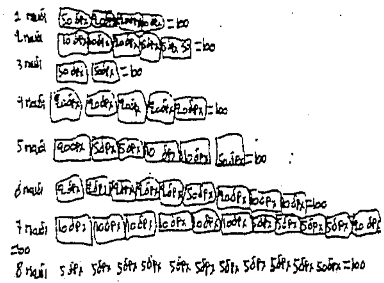
No41: Οι συντελεστές εμφανίζονται σε μικρότερο μέγεθος από τις δομικές μονάδες.

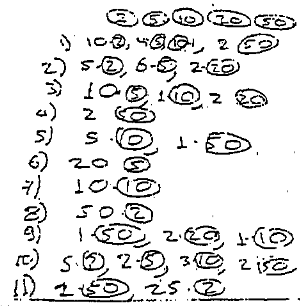
Διαφορά μεγέθους: Οι δομικές μονάδες έχουν μικρότερο μέγεθος από τους συντελεστές ή το αντίστροφο. (π.χ. No41).

Η ποικιλία των συμβολικών μορφών

Οι εκφράσεις των λύσεων που δόθηκαν από τους μαθητές ήταν πολύμορφες. Αρχικά θα μπορούσαν να διαχωριστούν σε δύο βασικές κατηγορίες ως προς τον τρόπο έκφρασης: το **λεκτικό τρόπο έκφρασης** (παρακάτω αναφερόμενο με «V») και το **συμβολικό τρόπο έκφρασης** («S»). Ο λεκτικός τρόπος έκφρασης αφορά μια λεκτική περιγραφή της λύσης που προτείνεται. Στη συγκεκριμένη έρευνα αυτός ο τρόπος εμφανίζεται μόνο στους μαθητές που παρανόησαν την εκφώνηση (όπως είδαμε πιο πάνω).

Ο συμβολικός τρόπος έκφρασης αφορά τη χρήση μαθηματικών συμβόλων (πράξεων, αριθμών, ισότητας) κατά τη διαδικασία λύσης του προβλήματος. Είναι αξιοσημείωτο ότι η πλειοψηφία των μαθητών (48/69) χρησιμοποίησε «αλγεβρικές παραστάσεις» («Σ») για να αναλύσει το κατοστάρικο σε μικρότερα κέρματα. Μόνο δύο μαθητές ανάλυσαν το κατοστάρικο παραθέτοντας τη μία μετά την άλλη συμβολικές μορφές («Π»). (π.χ. No44, No12).

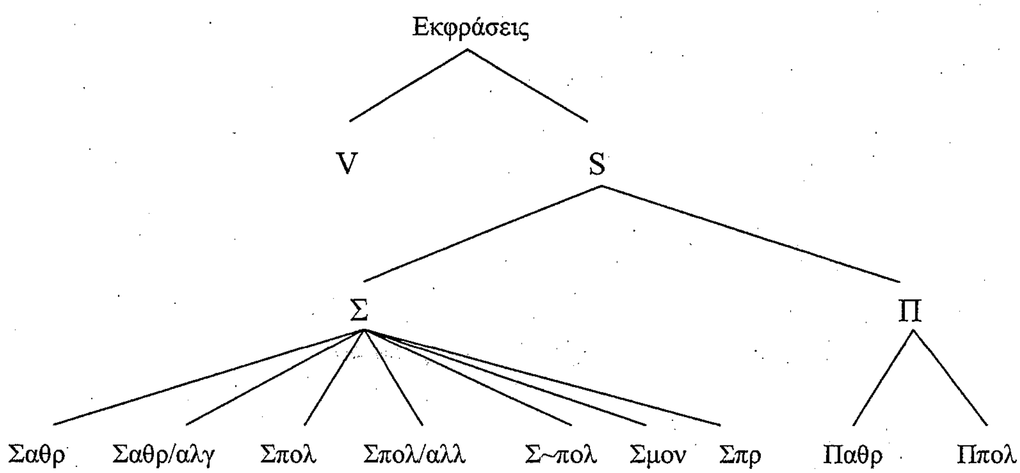




Νο44: Αθροιστική παράθεση χωρίς το σύμβολο της πρόσθεσης («Παθρ»). Παρατηρούμε ότι κάθε κέρμα είναι μέσα σε πλαίσιο, σημειώνοντας και την ένδειξη «δρχ.», ενώ το σύμβολο της πρόσθεσης έχει παραλειφθεί.

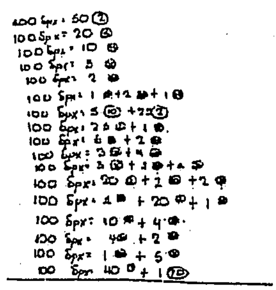
Νο12 (Αλβανός): Αρχικά διακρίνει τις δομικές μονάδες τοποθετώντας τες πάνω-πάνω μέσα σε κύκλο και στη συνέχεια προχωράει στη λύση του προβλήματος. Ο τρόπος έκφρασής του είναι παράθεση «μονωνύμων» («Πολ»).

Για μια παραπέρα ταξινόμηση των συμβολικών μορφών που χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές, προτείνουμε στο επόμενο διάγραμμα.

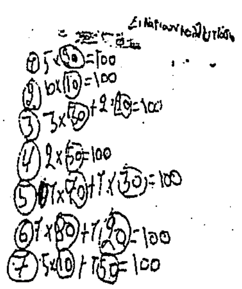


V : λεκτικός τρόπος.
S : συμβολικός τρόπος.
Σ : αλγεβρικές παραστάσεις.
Π : παράθεση συμβολικών μορφών.
Σαθρ : απλά αριθμητικά αθροίσματα σε οριζόντια μορφή.
Σπρ : συνδυασμός αλγεβρικών πράξεων.
Σαθρ/αλγ : άθροιση κατακόρυφα (αλγοριθμική διαδικασία πρόσθεσης).
Σπολ : αριθμητικά «πολυώνυμα», με τις δομικές μονάδες πολλαπλασιαζόμενες επί αριθμητικούς συντελεστές.
Σπολ/αλλ: αριθμητικά «πολυώνυμα», αλλά με δομικές μονάδες διαφορετικές από τα δοσμένα κέρματα.
Σ~πολ : αριθμητικά «πολυώνυμα» με τις δοσμένες δομικές μονάδες, στα οποία όμως δεν έχει γίνει αναγωγή των ομοίων «μονωνύμων» και περιέχουν επαναλήψεις της ίδιας δομικής μονάδας.
Σμον : μεμονωμένη χρήση «μονωνύμων».
Παθρ : παράθεση κερμάτων χωρίς το σύμβολο της πρόσθεσης.
Ππολ : ν-άδα «μονωνύμων» (όχι διατεταγμένη).

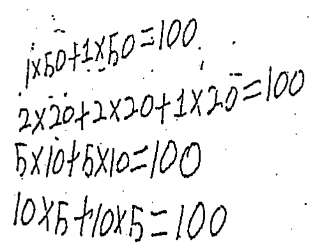
Οι μισοί περίπου μαθητές (32/69) έδωσαν λύσεις «πολυώνυμα» χρησιμοποιώντας ως δομικές μονάδες τα δοσμένα πέντε κέρματα (2, 5, 10, 20, 50), πολλαπλασιασμένες με αριθμητικούς συντελεστές. Υπάρχουν γραπτά με μεγάλη συνέπεια, όπου όλες οι απαντήσεις ακολουθούν αυτό τον τρόπο έκφρασης (π.χ. Νο43), και άλλα με μικρότερη συνέπεια ως προς τον ακολουθούμενο συμβολισμό. Μερικοί μαθητές, παρασυρόμενοι από το στόχο τους να «φτάσουν» τον αριθμό 100 (κατοστάρικο) με διαφορετικούς συνδυασμούς κερμάτων, γράφουν πάλι πολυωνυμικές μορφές, αλλά χρησιμοποιώντας διαφορετικές δομικές μονάδες οι οποίες δεν αντιστοιχούν σε υπαρκτά κέρματα («Σπολ/αλλ»). Μερικές φορές, ακόμα κι αυτές οι ανύπαρκτες δομικές μονάδες συμβολίζονται κλεισμένες μέσα σε κύκλο (π.χ. Νο6). Σε άλλα γραπτά συναντάμε εκφράσεις οι οποίες έχουν πολυωνυμική μορφή, αλλά στις οποίες δεν έχει γίνει η «αναγωγή των ομοίων όρων» και επομένως υπάρχουν επαναλήψεις της ίδιας δομικής μονάδας («Σ~πολ») (π.χ. Νο5).



Νο43: Οι δομικές μονάδες είναι μέσα σε κύκλο και πολλαπλασιασμένες με αριθμητικούς συντελεστές (πολυωνυμική μορφή). Όλες οι προτεινόμενες λύσεις ακολουθούν αυτή τη μορφή έκφρασης.

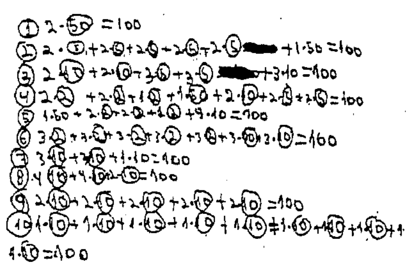


Νο6 (Τσιγγάνος): Αριθμητικά πολυώνυμα, αλλά με δομικές μονάδες διαφορετικές από τα δοσμένα κέρματα (π.χ. 30, 70, 80).

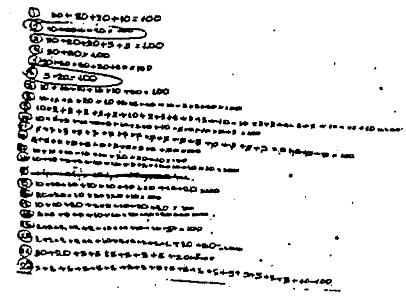


Νο5 (Τσιγγάνος): Αριθμητικά πολυώνυμα, στα οποία δεν έχει γίνει η αναγωγή των ομοίων «μονωνύμων» («Σ~πολ»). Όλες οι προτεινόμενες λύσεις ακολουθούν αυτή τη μορφή έκφρασης.

Σπάνια ακόμη διακρίνουμε τη μεμονωμένη χρήση «μονωνύμων» μέσα σε ένα σύνολο διαφορετικών τύπων εκφράσεων («Σμον»).



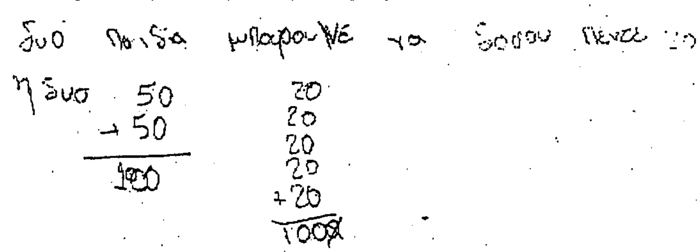
No14: Η πρώτη έκφραση είναι μια μεμονωμένη χρήση μονωνύμων. («Σμον»)



No18: Απλά αριθμητικά αθροίσματα σε οριζόντια μορφή. («Σαθρ»)

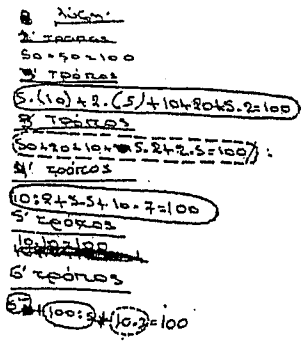
Κάπως συχνότερος τρόπος έκφρασης (9 στους 69) είναι τα απλά αριθμητικά αθροίσματα σε οριζόντια μορφή («Σαθρ»). Σ' αυτόν τον τρόπο έκφρασης τα παιδιά δεν συνηθίζουν να «κυκλώνουν» τις δομικές μονάδες, αφού ουσιαστικά όλοι οι αριθμοί που χρησιμοποιούν αντιστοιχούν σε κέρματα. Αντίθετα από τις πολυωνυμικές μορφές, δεν υπάρχουν αριθμητικοί συντελεστές σ' αυτές τις εκφράσεις.

Τρεις μόνο φορές εμφανίζεται η κατακόρυφη άθροιση, δηλαδή η αλγοριθμική διαδικασία της πρόσθεσης («Σαθρ/αλγ»). Και οι τρεις αυτές περιπτώσεις είναι περιπτώσεις μαθητών που έχουν παρανοήσει την εκφώνηση.

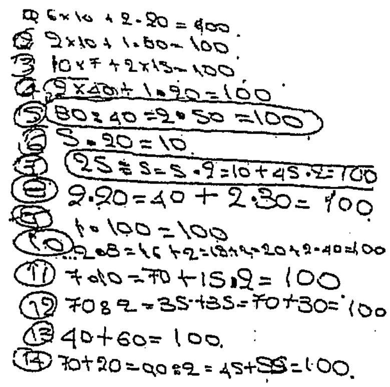


No 52: Κατακόρυφη άθροιση (αλγοριθμική διαδικασία της πρόσθεσης).

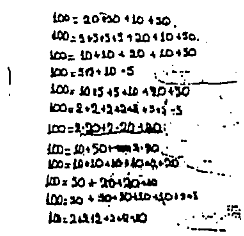
Τέλος, σε μερικά γραπτά συναντάμε συνδυασμούς αλγεβρικών πράξεων («Σπρ») με σκοπό να «φτάσουν» το κατοστάρικο της δασκάλας ή και λύσεις ποικιλόμορφες, οι οποίες πολλές φορές διακρίνονται από μικρή συνέπεια στο συμβολισμό που ακολουθείται, αλλά και από μια εκπληκτική δημιουργικότητα.



No1(Τσιγγάνα): Συνδυασμοί αλγεβρικών πράξεων.



No21: Συνδυασμοί αλγεβρικών πράξεων.



No26: Συνδυασμοί αλγεβρικών πράξεων (όχι παρενθέσεις).