

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1 (2.5 μονάδες):

(Α) Για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης $H_0 : \theta \in \Theta_0$ εναντίον της εναλλακτικής $H_1 : \theta \in \Theta_1$, με κρίσιμη περιοχή K , να δώσετε τον ορισμό του επιπέδου σημαντικότητας, της χαρακτηριστικής συνάρτησης και της συνάρτησης ισχύος.

☒) Έστω ότι η διάρκεια ζωής X ενός εξαρτήματος ακολουθεί την Εκβετική κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\theta > 0$. Με βάση τις παρατηρήσεις 34, 45, 38, 44, 41, 48, 33, 42, 39 και 36 να εκτιμηθεί με την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας η ποσότητα $a(\theta) = P(X > 40)$.

ΘΕΜΑ 2 (5 μονάδες):

(Α) Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την Γεωμετρική κατανομή $G(\theta)$, με $0 < \theta < 1$ άγνωστη παράμετρο.

☒) Να ελέγξετε αν η εν λόγω κατανομή ανήκει στην Ε.Ο.Κ.
☒) Να βρεθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση του θ .

☒) Να βρεθεί η Ε.Μ.Π., έστω T , της ποσότητας $a(\theta) = \frac{1}{\theta}$.

☒) Να δείξετε ότι η T είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της $a(\theta)$. Είναι η T Α.Ε.Ε.Δ. της $a(\theta)$;

☒) Με την βοήθεια της ανισότητας Cramér-Rao να αποδείξετε ότι η T είναι η Α.Ε.Ε.Δ. της $a(\theta)$.

(Β) Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την Ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-\theta, \theta]$, όπου $\theta > 0$ άγνωστη σταθερά.

☒) Να εκτιμήσετε το θ με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας.
☒) Να εκτιμήσετε το θ με τη μέθοδο των ροπών.

ΘΕΜΑ 3 (2.5 μονάδες):

(Α) Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την κατανομή Poisson(θ). Να κατασκευαστεί προσεγγιστικό 100(1- α)% Δ.Ε. για την άγνωστη παράμετρο θ .

☒) Η τιμή πώλησης (ϵ) ενός ορισμένου τόπου H/Y είναι τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, όπου μ και σ άγνωστες σταθερές. Σε τυχαίο δείγμα από 16 καταστήματα είχαμε τις ακόλουθες τιμές πώλησης: 631, 629, 717, 750, 724, 693, 633, 619, 591, 686, 690, 734, 774, 740, 639, 677. Να κατασκευαστεί και να δοθεί ένα 95% Δ.Ε. του μέσου μ .