

ΣΕΜΦΕ 2ο Εξάμηνο κανονική εξέταση - Ιούνιος 2013 (17-6-13)  
Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές

Όνοματεπώνυμο .....

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. α) Έστω  $M$  ο υπόχωρος του  $\mathbb{R}^4$  που παράγεται από τα διανύσματα  $v_1 = (1, 0, -1, 2)$  και  $v_2 = (-1, 1, 1, 0)$ .

ι) Να βρείτε το ορθογώνιο συμπλήρωμα  $M^\perp$  του  $M$  καθώς και μια ορθοκανονική βάση του  $M^\perp$ .

ιι) Να βρείτε την ορθή προβολή του διανύσματος  $v = (0, 1, 0, 1)$  στον υπόχωρο  $M$ .

β) Να αποδειχθεί ότι δύο όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

Θ2. α) Έστω  $V$  ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Να αποδείξετε ότι ένας γραμμικός μετασχηματισμός  $T : V \rightarrow V$  είναι ισομετρικός αν και μόνο αν απεικονίζει μια ορθοκανονική βάση του  $V$  σε ορθοκανονική.

β) Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (ο  $\mathbb{R}^3$  θεωρείτε με την κανονική του βάση) με

$$T(x, y, z) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{6}}z, \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{2}{\sqrt{6}}z, \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{6}}z \right).$$

1. Να εξετάσετε αν ο  $T$  είναι ισομετρικός.

2. Να βρείτε τον  $T^*$ . Είναι ο  $T$  αυτοσυζυγής; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Θ 3. α) Βρείτε για ποιες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha - 2 & \alpha + 1 & -\alpha \\ -2\alpha - 2 & 2\alpha + 1 & -2\alpha + 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

είναι διαγωνοποιήσιμος (μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας) και για ποιες όχι. Έπειτα, για τις τιμές του για τις οποίες ο  $A$  δεν είναι διαγωνοποιήσιμος, κατασκευάστε πλήρως την κανονική μορφή Jordan και τον αντίστοιχο πίνακα ομοιότητας.

Θ 4. α) Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Να αιτιολογήσετε γιατί ο  $A$  διαγωνοποιείται από ορθογώνιο πίνακα και να βρείτε έναν ορθογώνιο πίνακα  $Q$  και έναν διαγώνιο πίνακα  $\Delta$  ώστε να ισχύει:  $A = Q\Delta Q^T$ .

β) Δίνεται η εξίσωση  $3y^2 - 4xy + 2xz + 4yz - 2x - 2z + 1 = 0$ . Να εξετάσετε αν η επιφάνεια που περιγράφει η εξίσωση έχει κέντρο συμμετρίας και κατόπιν με κατάλληλη αλλαγή συστήματος συντεταγμένων να αναγνωρίσετε το είδος της επιφάνειας που παριστάνει.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ