

Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ 1°. Για μια φυσική καμπύλη του χώρου $\mathbf{r}(s)$,

A) Να υπολογισθεί το μικτό γινόμενο $(NN'N'')$ συναρτήσει της καμπυλότητας και της στρέψης της καμπύλης.

B) Να υπολογισθεί ένα διάνυσμα w ως προς την βάση $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ τέτοιο ώστε: $w \times \mathbf{T} = \mathbf{T}'$, $w \times \mathbf{B} = \mathbf{B}'$.

ΘΕΜΑ 2: A) Αν $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, $s \in [0, L]$ είναι μια φυσική παραμετρική καμπύλη ορίζουμε την νέα καμπύλη $\mathbf{q}(s) = \mathbf{r}(s) + (3-s)\mathbf{r}'(s)$. Να εξετασθεί αν η $\mathbf{q}(s)$ είναι φυσική παραμετρική καμπύλη και να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη στο σημείο $A(\mathbf{r}(s))$ είναι κάθετη στην εφαπτομένη στο σημείο $B(\mathbf{q}(s))$.

B) Δίνεται η επίπεδη καμπύλη που είναι το γράφημα μιας διαφορίσιμης C^2 -τάξης συνάρτησης $f(x)$, $x \in (a, b)$.

B1) Να βρεθούν τα μοναδιαία διανύσματα \mathbf{T} , \mathbf{N} .

B2) Να αποδειχθεί ότι η καμπυλότητα δίνεται από τον τύπο: $k(x) = f''(x) / \left(1 + (f'(x))^2\right)^{3/2}$ και να υπολογισθεί αυτή σε ένα σημείο x_0 τοπικού μέγιστου της $f(x)$.

ΘΕΜΑ 3: Έστω η στοιχειώδης επιφάνεια $S : \mathbf{r}(u, v), (u, v) \in \Omega$, του R^3 .

A) Αν $u = u(t, w), v = v(t, w), (t, w) \in W$, είναι επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρων και $\bar{S} = \phi(t, w) = r(u(t, w), v(t, w)), (t, w) \in W$, προσδιορίστε το τύπο που συνδέει τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα $N(u, v)$ και $\bar{N}(t, w)$ των επιφανειών S και \bar{S} στα σημεία $r(u_0, v_0)$ και $\phi(t_0, w_0)$ όπου $u_0 = u(t_0, w_0), v_0 = v(t_0, w_0)$.

B) Αν $r(u, v) = (u, v, u^2 + v^2 + 1), u^2 + v^2 \leq 4$ να παρασταθεί γραφικά η επιφάνεια, οι παραμετρικές καμπύλες $u=1$, και $v=1$ της επιφάνειας και να προσδιοριστούν το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας και η διεύθυνση των παραμετρικών καμπύλων στο σημείο τομής τους.

ΘΕΜΑ 4: Έστω η στοιχειώδης επιφάνεια $S : \mathbf{r}(u, v), (u, v) \in \Omega$, του R^3 , κλάσης 2.

A) Αν E, F, G, L, M, N είναι τα θεμελειώδη μεγέθη της επιφάνειας στο σημείο $r(u, v)$ και $F \neq 0$, δείξτε ότι η κάθετη καμπυλότητα k_n της επιφάνειας στο σημείο $r(u, v)$ είναι σταθερή ως προς κάθε διεύθυνση αν και μόνο αν $FN - GM = 0, LG - EN = 0, ME - FL = 0$. B) Αν $\mathbf{r}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v), (u, v) \in R^2$, δώστε τον αντίστοιχο ορισμό και εξετάστε αν οι καμπύλες $u = 3v$ και $v = u^2$ είναι γεωδαισιακές καμπύλες της επιφάνειας.

Διάρκεια εξέτασης: 2.5 ώρες

Καμπύλες του R^2 Εφαπτόμενο και κάθετο μοναδικό διάνυσμα: $\nu(t) = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|$, $\mathbf{T}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) / \nu(t)$, $\mathbf{N}(t) = \mathbf{J}\mathbf{T}(t)$, όπου

$J(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Εφαπτόμενη ευθεία: $\mathbf{R}(\lambda) = \mathbf{r}(t_0) + \lambda \dot{\mathbf{r}}(t_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Φυσική παράμετρος: Καμπυλότητα:

$\kappa(s) = \mathbf{r}''(s) \cdot \mathbf{N}(s) = \mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{J}\mathbf{T}(s)$, Τύποι Frenet: $\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{T}$ Τυχαία παράμετρος:

$\nu(t) = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = (\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{1/2}$, $\kappa(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{J}\dot{\mathbf{r}}(t) / \nu^3(t)$, $\kappa(t) = (\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)) / \nu^3(t)$ Τύποι Frenet:

$\dot{\mathbf{T}} = \kappa \nu \mathbf{N}$, $\dot{\mathbf{N}} = -\kappa \nu \mathbf{T}$. Καμπύλες του R^3 Για φυσική παράμετρο: Βασικά μοναδιαία διανύσματα: $\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s)$,

$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{r}''(s)}{\|\mathbf{r}''(s)\|}$, $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$, Τύποι Frenet: $\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}$, $\mathbf{N}' = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}$, $\mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N}$, $\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\mathbf{r}''(s)\|$

η καμπυλότητα, $\tau(s) = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{B}'$ η στρέψη. Για τυχαία παράμετρο: $\nu(t) = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|$, $\mathbf{T} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|}$, $\mathbf{B} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}$, $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$

$\kappa = \frac{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3}$, $\tau = \frac{(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \ddot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|^2}$ Τύποι Frenet: $\dot{\mathbf{T}} = \kappa \nu \mathbf{N}$, $\dot{\mathbf{N}} = -\kappa \nu \mathbf{T} + \tau \nu \mathbf{B}$, $\dot{\mathbf{B}} = -\tau \nu \mathbf{N}$.

ΒΛΦ= 0, 6, 8