

Εξέταση Πραγματικής Ανάλυσης
5 Ιουλίου 2012

Θέμα 1 (α)

- (i) Διατυπώστε το Αξιωμα Μαθηματικής Επαγγωγής και δείξτε ότι το \mathbb{N} είναι καλά διατεταγμένο (δώστε τον ορισμό του καλά διατεταγμένου συνόλου).
- (ii) Έστω $A \subset \mathbb{N}$ άπειρο. Δείξτε ότι το A είναι της μορφής $A = \{m_1 < m_2 < \dots < m_n < \dots\}$.
- (β) Έστω A, B μη κενά άνω φραγμένα υποσύνολα του \mathbb{R} .
 - (i) Δείξτε ότι $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.
 - (ii) Δείξτε ότι $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
 - (iii) Αν για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει ότι $a \leq b$, δείξτε ότι το B είναι κάτω φραγμένο και ότι $\sup A \leq \inf B$.

Θέμα 2 (α) Δίνονται τα ακόλουθα υποσύνολα του (\mathbb{R}^2, ρ_2)

$$A_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{Q}_+\}$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1 \text{ και } x_2 = 0\}$$

$$A_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0 \text{ και } x_1^2 + x_2^2 < 1\}.$$

- (i) Εξετάστε ποιά από τα A_1, A_2, A_3 είναι ανοικτά.
- (ii) Βρείτε τις κλειστότητες $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$.
- (β) Έστω X μη κενό σύνολο και ρ_1, ρ_2 δύο ισοδύναμες μετρικές πάνω στο X . Δείξτε ότι:
 - (i) Αν V είναι ρ_1 ανοικτό, τότε V είναι ρ_2 ανοικτό.
 - (ii) Αν $x \in X$ τέτοιο ώστε το x είναι σημείο συσσώρευσης του (X, ρ_1) , τότε το x είναι σημείο συσσώρευσης του (X, ρ_2) .

Θέμα 3 (α) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $(C_i)_{i \in I}$ μία οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Δείξτε ότι:

- (i) $C = \bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$.
- (ii) Αν $V \subset X$ ανοικτό ώστε $C \subset V$, τότε υπάρχει $F \subset I$ πεπερασμένο ώστε $\bigcap_{i \in F} C_i \subset V$.
- (β)(i) Έστω $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι αν $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον X , τότε $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον Y .
- (ii) Έστω $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.

Θέμα 4 (α) Έστω (X, ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:

- (i) Ο X έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών.
- (ii) Αν $(V_i)_{i \in I}$ είναι ανοικτό κάλυψμα για τον X , δείξτε ότι υπάρχει αριθμήσιμο υποκάλυψμα.
- (β) Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος χωρίς μεμονωμένα σημεία. Δείξτε ότι:
 - (i) Αν $x \in X$, τότε $X \setminus \{x\}$ είναι πυκνό.
 - (ii) Αν $D \subset X$ αριθμήσιμο, δείξτε ότι ο $X \setminus D$ είναι πυκνό στον X .

Καλή Επαυγχία!