

## Θέμα 1:

a) Να δοθεί το Τ.Α.Τ.  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u = 0$ ,  $u(x,0) = x$ .

Να εξεταστεί αν αναπτύγγονται κρούσηνά κατα.

(1.5 μν.).

b) Αν  $\Phi(u,v)$  είναι πια  $C^1$  συνάρτηση δύο μεταβλητών  
και αν  $u(x,y,z)$  και  $v(x,y,z)$  είναι δύο ρυχαία πρώτα  
ολοκληρώθια του πεδίου  $\Sigma = (P, Q, R)$ . τότε  
 $w(x,y,z) = \Phi(u(x,y,z), v(x,y,z))$  είναι επίγεις ή να  
πρώτο ολοκληρώθηκε του  $\Sigma$ .

(1.5 μν.).

## Θέμα 2:

a) Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές κατηγορίες επιπλέον  
εξιγωνής:  $u_{xx} + 2xy u_{xy} + e^x u_y = \cos(x+y)$ .

(1 μν.).

b) Να βρεθεί η κανονική μορφή της εξιγωνής:

$u_{xx} - y u_{xy} = u+1$ . Στη συνέχεια να λύθει.

(1 μν.).

### Θέμα 3

α) Να δειχθεί ότι το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών  
ζητιών ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος  
Cauchy-Kowalevsky και να βρεθούν οι όροι της  
σειράς Taylor εώς τα δεύτερα τετραγωνικά:

$$u_t = \cos ux, \quad u(0,x) = \frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{6}x^2. \quad (1.5\text{ λου.}).$$

β) Εάν ότι  $u$  είναι αρκούδικη συνάρτηση στο χωρίο  
 $\Omega$  του  $\mathbb{R}^2$ . Να δειχθεί ότι  $n$  και  $\epsilon$  είναι την ιδιότητα  
της μηνινούς ζητιών της  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} (\text{Αναπαράγομε } \text{συναρτήσεις } \text{στο } \mathbb{R}^2): \\ u(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_0} \left[ \log \frac{1}{|x-x_0|} \cdot \frac{\partial u(x)}{\partial n} - u(x) \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{|x-x_0|} \right] ds \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_0} \Delta u(x) \log \frac{1}{|x-x_0|} dx dy, \quad x_0 \in \Omega_0. \quad (1.5\text{ λου.}). \end{aligned}$$

### Θέμα 4

Διερεύτε το πρόβλημα συνοπτικών ζητιών:

$$\Delta u(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \in (-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)$$

$$u(x_1, 0) = e^{-x_1^2} \sin x_1, \quad x_1 \in (-\infty, +\infty).$$

Να λυθεί με τη μέθοδο της συνάρτησης Green (η λύση  
να δοθεί σε συνδυασμό της μερικής μηροφύλαξ).

$$\begin{aligned} (\text{Η θεμελιώδης λύση για την εξιγιενή Laplace είναι:} \\ E(x_1, x_2; y_1, y_2) = \frac{1}{4\pi} \ln \left[ (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 \right]. \quad (2\text{ λου.}) \end{aligned}$$