



Εξέταση του μαθήματος **ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**  
της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών

13 - 07 - 2012

**ΘΕΜΑ 1 (1.5 μον.)** Έστω  $\|\cdot\|$  μια νόρμα διανυσμάτων στο  $\mathbb{C}^r$  και  $\|\cdot\|_o$  η επαγόμενη από την  $\|\cdot\|$  νόρμα στο  $\mathbb{C}^{rxr}$ . Να αποδείξετε ότι:

- Η νόρμα  $\|\cdot\|_o$  είναι νόρμα πινάκων.
- $\|Ax\| \leq \|A\|_o \|x\|$ , για κάθε  $A \in \mathbb{C}^{rxr}$  και  $x \in \mathbb{C}^r$ .

**ΘΕΜΑ 2 (2.5 μον.)** Να κατασκευάσετε (πλήρως) μια παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών (παραγοντοποίηση SVD) για τον πίνακα  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  και να υπολογίσετε τον ψευδοαντίστροφο του  $A$ .

**ΘΕΜΑ 3 (1.5 μον.)** Έστω ένας πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{rxr}$  με ιδιάζουσες τιμές  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r \geq 0$ . Να αποδείξετε ότι:

- $\text{trace}(A) \leq s_1 + s_2 + \dots + s_r$ .
- Ο πίνακας  $A$  είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνο αν  $s_1 = s_2 = \dots = s_r = 1$ .

**ΘΕΜΑ 4 (1.5 μον.)** Να αποδείξετε ότι ένας αντιστρέψιμος πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{rxr}$  είναι κανονικός αν και μόνο αν ο πίνακας  $A^{-1}A^*$  είναι ορθομοναδιαίος. Έπειτα, να αποδείξετε ότι ένας αντιστρέψιμος πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{rxr}$  είναι κανονικός αν και μόνο αν  $A^* = AU$  για κάποιον ορθομοναδιαίο πίνακα  $U \in \mathbb{C}^{rxr}$ .

**ΘΕΜΑ 5 (1.0 μον.)** Έστω ένας κανονικός πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{4x4}$  με ιδιοτιμές  $-4, -3, 2i, 2$ . Με βάση την απόσταση  $d(A, B) = \|A - B\|_2$ , να κατασκευάσετε έναν πλησιότερο στον  $A$  πίνακα  $B$  με διπλή ιδιοτιμή και να υπολογίσετε την αντίστοιχη απόσταση.  $(\lambda+4)(\lambda+3)(\lambda-2i)(\lambda-2)$  χρήσιμη για την επόμενη εξέταση

**ΘΕΜΑ 6 (2.0 μον.)** Έστω ένας πίνακας  $A \in \mathbb{C}^{rxr}$  βαθμού  $\text{rank}(A) = 1$ . Να αποδείξετε (με εφαρμογή της παραγοντοποίησης SVD ή και όχι) ότι  $A = X \cdot Y^T$  για κάποιους μη μηδενικούς  $X, Y \in \mathbb{C}^{rx1}$  και να κατασκευάσετε μια παραγοντοποίηση LU του πίνακα  $A$ . Έπειτα να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του πίνακα  $B = I_r + A$  και να δικαιολογήσετε γιατί ο  $B$  παραγοντοποιείται πάντα στη μορφή LU.

Για όσους δεν ληφθεί υπόψη ο βαθμός της προόδου, η διάρκεια εξέτασης είναι 3 ώρες και απαντούν σε όλα τα θέματα.

Για όσους ληφθεί υπόψη ο βαθμός της προόδου, η διάρκεια εξέτασης είναι 2 ώρες και απαντούν στα θέματα 3, 4, 5, 6.

(Καλή Επιτυχία)