



Επαναληπτική εξέταση του μαθήματος **ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**
της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών

30-08-2012

Θ.1 (1,5 μον.) Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \times n$ πίνακες A και B , ισχύει $\|AB\|_F \leq \|A\|_2 \|B\|_F$.

Θ.2 (1 μον.) Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \times n$ πίνακα A , ισχύει $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{\text{rank}(A)} \|A\|_2$.

Θ.3 (2 μον.) Έστω μια ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα πινάκων $\|\cdot\|$ η οποία για κάθε διαγώνιο πίνακα ισούται με το μέγιστο μέτρο διαγωνίου στοιχείου του. Με βάση τη νόρμα αυτή, να αποδείξετε ότι για κάθε $n \times n$ πίνακα A με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ και $\varepsilon > 0$, ισχύει $\bigcup_{j=1,2,\dots,n} \Delta(\lambda_j, \varepsilon) \subseteq \sigma_\varepsilon(A)$ (όπου με $\Delta(\lambda_j, \varepsilon)$ συμβολίζουμε τον κλειστό κυκλικό δίσκο κέντρου λ_j και ακτίνας ε). Επιπλέον, να αποδείξετε ότι αν ο πίνακας A είναι διαγώνιος, τότε $\sigma_\varepsilon(A) = \bigcup_{j=1,2,\dots,n} \Delta(\lambda_j, \varepsilon)$.

Θ.4 (1,5 μον.) Έστω ένας $n \times n$ πίνακας A με ερμιτιανό μέρος $H(A) = (A + A^*)/2$ και αντηρμιτιανό μέρος $S(A) = (A - A^*)/2$. Να αποδείξετε ότι ο A είναι κανονικός αν και μόνο αν κάθε ιδιοδιάνυσμα του $S(A)$ είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του $H(A)$.

Θ.5 (3 μον.) Έστω οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Να κατασκευάσετε μια παραγοντοποίηση QR του A και να υπολογίσετε τη νόρμα $\|A\|_F$. Έπειτα να λύσετε το σύστημα $AX = B$ με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Θ.6 (1 μον.) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη ιδιάζουσα τιμή ενός $n \times n$ πίνακα A δίνεται από τη σχέση $s_1 = \max \{ |y^* Ax| : x, y \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 = \|y\|_2 = 1 \}$. *SVD του A*