

Φυσική IV (Κβαντομηχανική-I), ΣΕΜΦΕ 4^ο Εξ., Ακ. Έτος 2011, Κανονική Εξέταση

Διδάσκοντες: Θ. Αλεξόπουλος, Γ. Ζουπάνος

Συνεργάτες: Σ. Λεοντσίνης, Γ. Ορφανίδης

Παρασκευή 24.06.2011 12:00, Διάρκεια 2 1/2 ώρες

Θέμα 1. Σωματίδιο μάζας m κινείται σ' ένα δυναμικό της μορφής

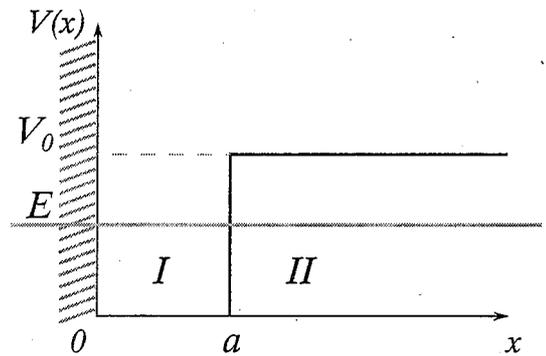
$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{για } x < 0, \\ 0 & \text{για } 0 \leq x \leq a, \text{ (περιοχή I),} \\ V_0 & \text{για } x > a, \text{ (περιοχή II), όπου } V_0 > 0 \end{cases}$$

όπως φαίνεται στο σχήμα.

Να δείξετε ότι η συνθήκη για να έχουμε δέσμιες καταστάσεις (δέσμιες είναι οι καταστάσεις με ενέργεια $E < V_0$), είναι

$$\tan\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}a\right) = -\sqrt{\frac{E}{V_0 - E}}$$

όπου $E > 0$ είναι η ενέργεια του σωματιδίου.



Θέμα 2. (A) Ξεκινώντας από τη σχέση Planck-Einstein $E = \hbar\omega$ να καταλήξετε στη σχέση de Broglie $p = \hbar k$ για ένα ελεύθερο μη σχετικιστικό σωματίδιο μάζας m . Θεωρήστε ότι η ταχύτητα του σωματιδίου v ταυτίζεται με την ομαδική ταχύτητα ($v_g \equiv v$) του κύματος που χαρακτηρίζει το σωματίδιο.

(B) Για ένα ελεύθερο σχετικιστικό σωματίδιο μάζας m , ορμής p ($p = \hbar k$) και ενέργειας E ($E = \hbar\omega$), όπου k κυματαριθμός, ω κυκλική συχνότητα,

(i) να γράψετε τη σχέση διασποράς του, δηλαδή τη συνάρτηση $\omega = \omega(k)$.

(ii) να δείξετε ότι ισχύει η σχέση

$$v_g v_p = c^2$$

όπου c η ταχύτητα φωτός στο κενό, v_g η ομαδική ταχύτητα του υλικού κύματος που χαρακτηρίζει το σωματίδιο, και v_p η φασική ταχύτητα.

Θέμα 3. Δίνεται το κυματοπακέτο $\phi(k)$ ενός σωματιδίου στο χώρο των ορμών (όπου η ορμή $p = \hbar k$, k είναι ο κυματαριθμός)

$$\phi(k) = Ae^{-a^2k^2/4} \quad a > 0, \quad A > 0$$

- (i) Να βρείτε τη σταθερά A ώστε η συνολική πιθανότητα στο χώρο των κυματαριθμών να είναι ίση με τη μονάδα.
 (ii) Να βρείτε το κυματοπακέτο στο χώρο των θέσεων $\psi(x)$.
 (iii) Να εξετάσετε αν ισχύει η σχέση αβεβαιότητας

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Θέμα 4. Θεωρήστε έναν αρμονικό ταλαντωτή σε μια διάσταση, μάζας m και κυκλικής συχνότητας ω .

Αν ο ταλαντωτής βρίσκεται στην τυχαία ιδιοκατάσταση $\psi_n(x)$ της ενέργειας, να υπολογίσετε τη μέση τιμή της κινητικής ενέργειας $\langle T \rangle$ με τη βοήθεια της αλγεβρικής μεθόδου, δηλαδή χρησιμοποιώντας τους τελεστές της δημιουργίας \hat{a}^\dagger και καταστροφής \hat{a} .

Θέμα 5. Σωματίδιο μάζας m κινείται σ' ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού πλάτους L , δηλαδή το δυναμικό δίνεται από τη συνάρτηση

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } 0 < x < L, \\ \infty & \text{αλλού} \end{cases}$$

Την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$ η κυματοσυνάρτηση έχει τη μορφή

$$\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{8}{5L}} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

- (i) Εκφράστε την κυματοσυνάρτηση $\Psi(x, 0)$ ως ένα γραμμικό συνδυασμό των ιδιοσυναρτήσεων $\psi_n(x)$ του συστήματος.
 (ii) Γράψτε τη χρονική εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης, δηλαδή προσδιορίστε την κυματοσυνάρτηση $\Psi(x, t)$ για οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t > 0$.
 (iii) Να υπολογίσετε τη μέση ενέργεια $\langle E \rangle$ του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t > 0$.

Χρήσιμες σχέσεις:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \quad \text{για } \text{Re}(\lambda) > 0$$

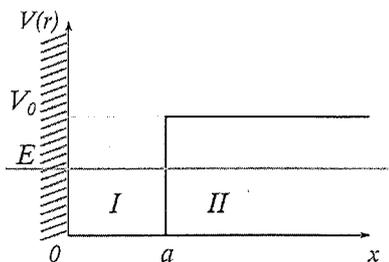
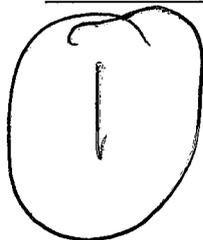
$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x} + i\hat{p}), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x} - i\hat{p})$$

$$\hat{a}^\dagger\psi_n(x) = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}(x), \quad \hat{a}\psi_n(x) = \sqrt{n}\psi_{n-1}(x)$$

Η εξέταση πραγματοποιείται με ανοικτά βιβλία αλλά ΟΧΙ προσωπικές σημειώσεις.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Να απαντήσετε σε 4 από τα 5 θέματα.

Καλή επιτυχία.



Σχήμα 2

Λύση:

Η εξίσωση του Schrödinger για τις δύο περιοχές I και II, όπως φαίνονται στο σχήμα 2, θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} &= E\psi, & \text{για } 0 \leq x \leq a \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V_0\psi &= E\psi, & \text{για } x > a \\ \psi(x) &= 0, & \text{για } x < 0 \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + k_1^2\psi_1 &= 0, & \text{όπου } k_1^2 &= \frac{2mE}{\hbar^2} \\ \frac{d^2\psi_2}{dx^2} - k_2^2\psi_2 &= 0, & \text{όπου } k_2^2 &= \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \end{aligned}$$

όπου $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ είναι οι κυματοσυναρτήσεις στις δύο περιοχές I και II αντίστοιχα. Οι λύσεις των δύο αυτών διαφορικών εξισώσεων θα είναι

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, & \text{για } 0 \leq x \leq a \\ \psi_2(x) &= Ce^{k_2x} + De^{-k_2x}, & \text{για } x > a \end{aligned}$$

Αφού $\psi_2(x) \rightarrow 0$, για $x \rightarrow +\infty$, θα πρέπει $c = 0$. Επίσης, για $\psi_1(0) = 0$, έπεται $A = -B$. Επομένως, η συνάρτηση $\psi_1(x)$ θα είναι

$$\psi_1(x) = A(e^{ik_1x} - e^{-ik_1x}) = 2iA \sin(k_1x)$$

Από τη συνθήκη συνέχειας στο σημείο $x = a$ θα πρέπει

$$\begin{aligned} \psi_1(a) &= \psi_2(a) & \text{και} & \quad \left. \frac{d\psi_1}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{d\psi_2}{dx} \right|_{x=a} \\ \Rightarrow 2iA \sin(k_1a) &= De^{-k_2a} \\ \Rightarrow 2iAk_1 \cos(k_1a) &= -Dk_2e^{-k_2a} \end{aligned}$$

Διαιρώντας κατά μέλη αυτές τις δύο εξισώσεις θα λάβουμε

$$\begin{aligned} \tan(k_1a) &= -\frac{k_1}{k_2} \Rightarrow \tan\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}a\right) = -\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m(V_0 - E)}} \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \\ \Rightarrow \tan\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}a\right) &= -\sqrt{\frac{E}{V_0 - E}} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad E = \frac{p^2}{2m}$$

$$\textcircled{A} \quad E = \hbar\omega \Rightarrow \frac{p^2}{2m} = \hbar\omega$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dm} dp = \frac{\hbar}{d} \omega \Rightarrow \frac{m \omega dp}{m} = \hbar \omega$$

$$\Rightarrow \frac{d\omega}{dk} dp = \hbar d\omega \Rightarrow \int dp = \int \hbar dk$$

$$p = \hbar k + C, \quad \text{if } C=0 \Rightarrow$$

$$p = \hbar k$$

$$\textcircled{B} \quad E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$\textcircled{i} \quad \hbar^2 \omega^2 = \hbar^2 k^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{k^2 c^2 + m^2 c^4} / \hbar$$

$$\textcircled{ii} \quad v_p = \frac{\omega}{k}, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\sqrt{k^2 c^2 + m^2 c^4}} \cdot 2kc^2 =$$

$$= \frac{kc^2}{\omega}, \quad \Rightarrow v_p v_g = \frac{\omega}{k} \frac{kc^2}{\omega} = c^2$$

③

$$(i) \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(k)|^2 dk = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 k^2 / 2} dk$$

$$= A \sqrt{\frac{2\pi}{a^2}} \Rightarrow A = \left(\frac{a^2}{2\pi} \right)^{1/4}$$

$$(ii) \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{ikx} dk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{a^2}{2\pi} \right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2 k^2}{4}} e^{ikx} dk$$

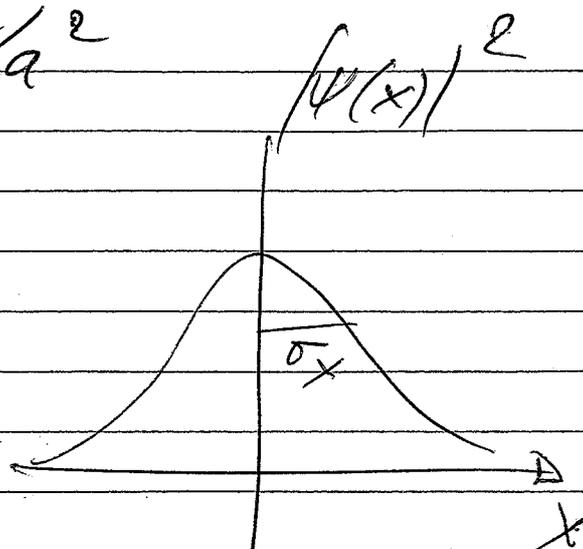
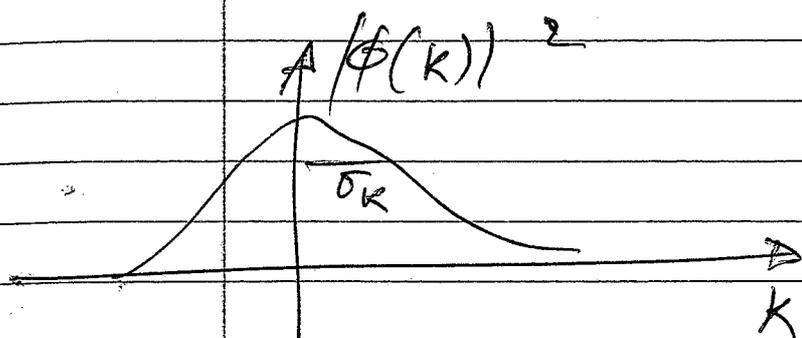
$$\frac{a^2 k^2}{4} - ikx = \left(\frac{ak}{2} \right)^2 - 2 \frac{ikax}{2a} + \left(\frac{ix}{a} \right)^2 - \left(\frac{ix}{a} \right)^2$$

$$= \left(\frac{ak}{2} - \frac{2i}{a} \right)^2 + \frac{ax^2}{a^2}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{a^2}{2\pi} \right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{ak}{2} - \frac{2i}{a} \right)^2 - \frac{x^2}{a^2}} dk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{a^2}{2\pi} \right)^{1/4} e^{-x^2/a^2} \sqrt{\pi} \frac{2}{a}$$

$$\Rightarrow \psi(x) = C_1 e^{-x^2/a^2}$$



$$|\phi(k)|^2 = C_1 e^{-a^2 k^2/2}$$

$$|\psi(x)|^2 = C_1 e^{-2x^2/a^2}$$

$$\sigma_k = \frac{1}{a}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow$$

$$\sigma_x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sigma_k \sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sigma_p \sigma_x = \frac{\hbar}{2}$$

$$\hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$

4

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle = -\frac{\hbar \omega}{4}$$

$$\langle (\hat{a}^\dagger - \hat{a})(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \rangle = -\frac{\hbar \omega}{4} \left[\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \rangle - \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle - \langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle + \langle \hat{a} \hat{a} \rangle \right]$$

$$= -\left[\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \rangle - \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle - \langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle + \langle \hat{a} \hat{a} \rangle \right]$$

Εκουμε:

$$\langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle = \int \psi_n^* \underbrace{\hat{a} \hat{a}^\dagger \psi_n}_{\substack{\sqrt{n+1} \psi_{n+1} \\ (n+1) \psi_{n+1}}} dx = n+1$$

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \int \psi_n^* \underbrace{\hat{a}^\dagger \hat{a} \psi_n}_{\substack{\sqrt{n} \psi_{n-1} \\ n \psi_{n-1}}} dx = n$$

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= -\frac{\hbar \omega}{4} \left[-n - n - 1 \right] = \\ &= \frac{\hbar \omega}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \psi(x,0) &= \sqrt{\frac{8}{5L}} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \\
 &= \sqrt{\frac{8}{5L}} \left[\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right) \right] \\
 &= \sqrt{\frac{8}{5L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \sqrt{\frac{2}{5L}} \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)
 \end{aligned}$$

$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$

$$\psi = \frac{2}{\sqrt{5}} \psi_2(x) + \frac{1}{\sqrt{5}} \psi_4(x)$$

$$\text{(ii)} \quad \Psi(x,t) = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \psi_2(x) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-\frac{iE_4 t}{\hbar}} \psi_4(x)$$

(600)
(11)

$$\langle E \rangle = (\Psi(x, t), \hat{H} \Psi(x, t))$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 E_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 E_4$$

$$= \frac{4}{5} \frac{4\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} + \frac{1}{5} \frac{16\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

$$= \frac{32\pi^2 \hbar^2}{10ma^2}$$