

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ & ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ

7^ο Εξάμηνο

2^ο Σύνολο Ασκήσεων Πυρηνικής Φυσικής Κ.ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ

A) Λυμένες ασκήσεις

1.

5.3 (α) Δείξτε από την εξίσωση (5.1) ότι η μέση ενέργεια Coulomb για ένα πρωτόνιο σε πυρήνα με ατομικό αριθμό Z είναι

$$\bar{U}_c = \frac{6(Z-1)e^2}{5 \cdot 4\pi\epsilon_0 R}$$

(β) Δείξτε ότι για τον πυρήνα $^{208}_{82}\text{Pb}$, $\bar{U}_c \approx 2\bar{U}$.

ΛΥΣΗ

$$d) V_c(r) = \frac{(Z-1)e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left[\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right] \quad r < R$$

$$\bar{V}_c = \frac{1}{V} \int V_c(r) dV = \frac{1}{V} \int_0^R \frac{(Z-1)e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left[\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right] 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3 \epsilon_0 R} \left[\int_0^R \frac{3}{2} r^2 dr - \int_0^R \frac{r^4}{2R^2} dr \right] =$$

$$= \frac{3(Z-1)e^2}{4\pi\epsilon_0 R^4} \left[\frac{3}{2} \frac{R^3}{3} - \frac{1}{2R^2} \frac{R^5}{5} \right] = \frac{3(Z-1)e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \right) =$$

$$= \frac{3(Z-1)e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{8}{20} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 5} \frac{(Z-1)e^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{6(Z-1)e^2}{5 \cdot 4\pi\epsilon_0 R}$$

Άρα $\bar{U}_c = \frac{6(Z-1)e^2}{5 \cdot 4\pi\epsilon_0 R}$

β) Για τον πυρήνα ^{208}Pb έχουμε ότι

(εξίσωση 4.2) $R = 1.1 \times 208^{1/3} \text{ fm} = 1.1 \times 5.9 \text{ fm} = 6.5 \text{ fm}$

$$\bar{U}_c = \frac{6 \times 81 \times 1.44 \text{ MeV fm}}{5 \times 6.5 \text{ fm}} = 21.5 \text{ MeV}$$

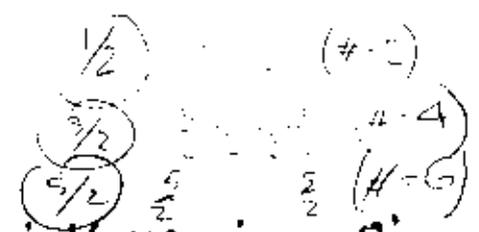
$$\bar{U} \approx 11 \text{ MeV} \quad \text{και} \quad \frac{\bar{U}_c}{\bar{U}} = \frac{21.5 \text{ MeV}}{11 \text{ MeV}} = 1.95 \approx \bar{U}_c \approx 2\bar{U}$$

2.

5.5 Προτείνετε τιμές για τα spin και τις ομοτιμίες των παρακάτω πυρήνων στην θεμελιώδη τους κατάσταση:

$^{31}_{15}\text{P}$, $^{67}_{30}\text{Zn}$, $^{115}_{49}\text{In}$.

ΛΥΣΗ



α) $^{31}_{15}\text{P}$: Τα 15 πρωτόνια και τα 16 νετρόνια θα καταλάβουν τις κατάστασεις (βλέπε πίνακα 5.1 του βιβλίου σας)

$$15p \Rightarrow \left| \begin{matrix} 1s_{1/2} & 1p_{3/2} & 1p_{1/2} & 1d_{5/2} \\ 2 & 4 & 2 & 6 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 2s_{1/2} \\ 1 \end{matrix} \rangle \Rightarrow j_p = 1/2$$

$$16n \Rightarrow \left| \begin{matrix} 2s_{1/2} \\ 2 \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow j_n = 0$$

Επομένως το spin και η ομοτιμία του ^{31}P θα χαρακτηρίζεται από το τελευταίο αριστερό πρωτόνιο αφού τα υπόλοιπα p και n θα "ζευγαρωθούν" ανά δύο και θα δώσουν spin 160 με μηδέν.

Αρα προτεινόμενο spin $j = j_p + j_n = 1/2 + 0 = 1/2$, και ομοτιμία $(-1)^{l=0} = +$, αφού το τελευταίο p θα είναι στη κατάσταση $|2s_{1/2}\rangle \Rightarrow |l, s, j, j_z\rangle = |0, 1/2, 1/2, j_z\rangle$ (Η κατάσταση s αντιστοιχεί σε $l=0$)

Αρα η θεμελιώδης κατάσταση του ^{31}P σύμφωνα με το αλληλόστροφο των φλοιών θα χαρακτηρίζεται από $j^\pi = 1/2^+$ και συμφωνεί με το πείραμα

β) $^{67}_{30}\text{Zn}$: Ο ψευδάργυρος με $A=67$ έχει ένα αριστερό νετρόνιο. Τα τελευταία 5 νετρόνια θα καταλάβουν το φλοιό $1f_{5/2}$. Τα 4 νετρόνια θα "ζευγαρωθούν" και το τελευταίο

Ως θα κινεί στο φλοιό $1 \frac{1}{2}$ θα χαρακτηρίσει
 το spin και την ομοτιμία της θεμελιώδους
 κατάσταση του ${}_{30}^{67}\text{Zn}$, στο φλοιό των φλοιών

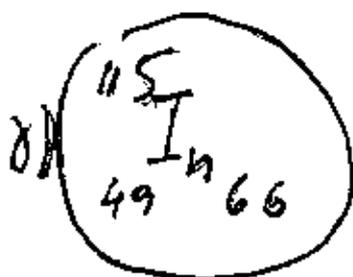
Προτεινόμενο spin $j = 5/2$

Προτεινόμενη ομοτιμία $(-1)^{\ell=3} = -1$, αφού ο φλοιός
 ℓ αντιστοιχεί σε $\ell = 3$

Τελικά

$$j^{\pi} = 5/2^{-}$$

, συμφωνεί με το δείγμα



: Θα χαρακτηριστεί από το
 τελευταίο φλοιό φλοιών

Σύμφωνα με τον πίνακα 5.1 του βιβλίου σας τα
 τελευταία 9 φλοιό θα κινούνται στο φλοιό $19 \frac{1}{2}$
 Τα 8 p θα "ζευγαρωθούν" και το τελευταίο ωύ
 θα κινεί στο φλοιό $19 \frac{1}{2}$ θα χαρακτηρίσει
 το spin και την ομοτιμία της θεμελιώδους
 κατάσταση του ${}_{49}^{115}\text{In}$ στο φλοιό των φλοιών

Προτεινόμενο spin $j = 9/2$

>> ομοτιμία $(-1)^{\ell=4} = +1$ αφού ο φλοιός
 ℓ αντιστοιχεί σε $\ell = 4$

Τελικά

$$j^{\pi} = 9/2^{+}$$

, συμφωνεί με το δείγμα

3.

5.7 Υπολογίστε τις συχνότητες του πυρηνικού μαγνητικού συντονισμού για (α) πρωτόνια, (β) $^{43}_{20}\text{Ca}$ (δες Πρόβλημα 5.6), σε ένα μαγνητικό πεδίο του 1 tesla ($=10^4$ gauss).

ΛΥΣΗ

$$\hbar\omega = |\mu| \frac{B}{j} \quad \text{Εξ. 5.21 τῶ βιβλίου σας}$$

$$\hbar 2\pi\nu = |\mu| B/j \Rightarrow \boxed{V = \frac{|\mu| B}{2\pi\hbar j}}$$

α) Πρωτόνια : $\mu_p = 2.79285 \mu_N$

$$\mu_N = 3.15245 \cdot 10^{-8} \text{ eV T}^{-1}$$

$$\hbar = 6.582 \cdot 10^{-16} \text{ eV}\cdot\text{s}$$

$$V_p = \frac{|\mu_p| B}{2\pi\hbar j} = \frac{2.79285 \times 3.15245 \cdot 10^{-8} \text{ eV T}^{-1} \cdot 1 \text{ T}}{2 \times 3.14 \times 6.582 \cdot 10^{-16} \text{ eV}\cdot\text{s} \cdot 1/2} =$$

$$= 0.4258 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1} = 42.58 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 42.58 \text{ MHz}$$

Αρα $\boxed{V_p = 42.58 \text{ MHz}}$

β) $^{43}_{20}\text{Ca}$: $\mu = -1.32 \mu_N$ και $j = 7/2$

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{|\mu| B}{2\pi\hbar j} \\ V_p &= \frac{|\mu_p| B}{2\pi\hbar j_p} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V = V_p \frac{|\mu| j_p}{|\mu_p| j} = 42.58 \text{ MHz} \times \frac{1.32 \mu_N}{2.79 \mu_N} \times \frac{1/2}{7/2} = 42.58 \text{ MHz} \times 0.06759 = 2.88 \text{ MHz}$$

Αρα $\boxed{V(^{43}\text{Ca}) = 2.88 \text{ MHz}}$

4.

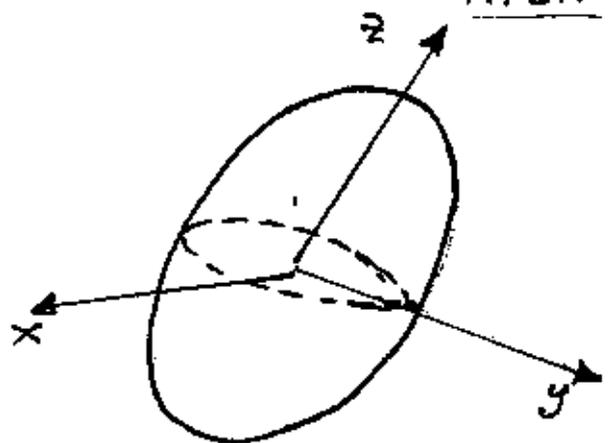
5.8 Δείξτε ότι για ένα ομοιόμορφα φορτισμένο ελλειψοειδές εκ περιστροφής

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, \quad \text{ολικού φορτίου } Ze,$$

$$Q_{zz} = \frac{2}{3} Z (b^2 - a^2).$$

Ο πυρήνας ${}^{176}_{71}\text{Lu}$ έχει $j=7$ και μια πολύ μικρή ηλεκτρική τετραπολική ροπή 8.0 barns. Υποθέστε ότι ο πυρήνας στην κατάσταση με $j_z=7$ έχει περίπου μια ελλειψοειδή κατανομή φορτίου της παραπάνω μορφής. Υπολογίστε τα a και b .

ΛΥΣΗ



$$Q_{ij} = \int \rho(\vec{r}) [3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}] d^3\vec{r}$$

$$i, j \rightarrow x, y, z$$

$$Q_{zz} = \int \rho(\vec{r}) (3z^2 - r^2) d^3\vec{r} =$$

$$= \int \rho(\vec{r}) (3z^2 - x^2 - y^2 - z^2) d^3\vec{r} = \int \rho(\vec{r}) (2z^2 - x^2 - y^2) d^3\vec{r}$$

Επομένως

$$Q_{zz} = \int \rho(\vec{r}) (2z^2 - x^2 - y^2) d^3\vec{r}$$

α) Μέσω του μετασχηματισμού

$$x = x'a, \quad y = y'a \quad \text{και} \quad z = z'b$$

η ομοιομορφία στο σημείο του ελλειψοειδούς, μετασχηματίζεται σε ομοιομορφία στον σφαιρο με ακτίνα $R=1$, διότι

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{a^2(x'^2+y'^2)}{a^2} + \frac{b^2 z'^2}{b^2} \leq 1$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 \leq 1$$

$$J = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial z}{\partial x'} \\ \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial y'} & \frac{\partial z}{\partial y'} \\ \frac{\partial x}{\partial z'} & \frac{\partial y}{\partial z'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g)} \quad Q_{zz} &= \rho \int \left[2b^2 z'^2 - \alpha^2 x'^2 - \alpha^2 y'^2 \right] \overset{\text{Jacobiani του κεντρικού}}{\alpha^2 b} dx' dy' dz' = \\
 &= \rho \alpha^2 b \left[2b^2 \int z'^2 dx' dy' dz' - \alpha^2 \int x'^2 dx' dy' dz' - \alpha^2 \int y'^2 dx' dy' dz' \right] = \\
 &= \rho \alpha^2 b \left[2b^2 I_3 - \alpha^2 I_1 - \alpha^2 I_2 \right]
 \end{aligned}$$

λόγω συμμετρίας $I_1 = I_2 = I_3 = I$

$$\begin{aligned}
 \text{και} \quad I_1 + I_2 + I_3 &= \int (x'^2 + y'^2 + z'^2) dx' dy' dz' = \int r'^2 dx' dy' dz' = \\
 &= \int r'^2 4\pi r'^2 dr' = 4\pi \int r'^4 dr' = \frac{4\pi}{5} r'^5 \Big|_0^1 = \frac{4\pi}{5}
 \end{aligned}$$

$$\text{Αρα} \quad 3I = \frac{4\pi}{5} \Rightarrow \boxed{I = \frac{4\pi}{15}}$$

$$\text{και} \quad Q_{zz} = \rho \alpha^2 b 2(b^2 - \alpha^2) I = \frac{8\pi}{15} \rho \alpha^2 b (b^2 - \alpha^2)$$

Το ολικό φορτίο του ελλειγοειδούς θα είναι:

$$Ze = \int \rho dV = \rho \int dx dy dz = \rho \alpha^2 b \int dx' dy' dz' =$$

$$= \rho \alpha^2 b \frac{4\pi}{3} R^3 \quad (R=1) = \frac{4\pi}{3} \rho \alpha^2 b \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{3Ze}{4\pi \alpha^2 b}}$$

$$\text{Τελικά} \quad Q_{zz} = \frac{8\pi}{15} \frac{3Ze}{4\pi \alpha^2 b} \alpha^2 b (b^2 - \alpha^2) = \frac{2}{5} Ze (b^2 - \alpha^2)$$

$$\text{Αρα} \quad \boxed{Q_{zz} = \frac{2}{5} Ze (b^2 - \alpha^2)} \quad (1)$$

Θεωρώντας την συνθήκη της ομογενούς ύλης εκθέσει και 16n με $\rho_0 = 0.17 \text{ νουκλιόνια}/\text{fm}^3$ έχουμε ότι:

$$\rho_0 V = A \Rightarrow \rho_0 \frac{4\pi}{3} a^2 b = A \Rightarrow \boxed{a^2 b = \frac{3A}{4\pi\rho_0}} \quad (2)$$

Από τις εγ. (1) και (2) μπορούμε να υπολογίσουμε τα a και b

$$(1) \Rightarrow b^2 - a^2 = \frac{5Q_{zz}}{2Ze} = \frac{5 \times 8 \text{ barns} \cdot e}{2 \times 71 \cdot e} = \frac{5 \times 8 \times 100 \text{ fm}^2}{2 \times 71} = 28.17 \text{ fm}^2 \Rightarrow \boxed{b^2 - a^2 = 28.17 \text{ fm}^2} \quad (3)$$

$$(2) \Rightarrow a^2 b = \frac{3 \times 176 \text{ νουκλιόνια}}{4 \times 3.14 \times 0.17 \text{ νουκλιόνια}/\text{fm}^3} = 247.16 \text{ fm}^3$$

$$\text{Αρα } \boxed{a^2 b = 247.16 \text{ fm}^3} \quad (4)$$

Από τις (3) και (4) βρίσκουμε ότι

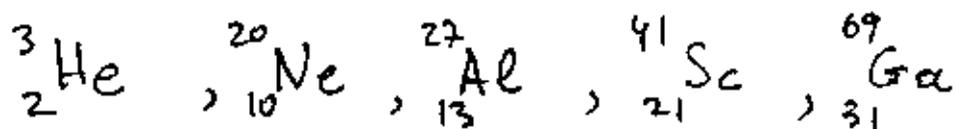
$$a \approx 5.6 \text{ fm}$$

$$b \approx 7.7 \text{ fm}$$

B) Να λυθούν οι ασκήσεις

5. Ασκήσεις 5.1, 5.2, 5.4 και 5.6 του βιβλίου σας.

6. Προτείνεται τιμές για τις στροφορμές και τις ομοτιπίες των παρακάτω ουρηνών στη θεμελιώδη τους κατάσταση



στα πλαίσια του προτύπου των quaiών.

Απάντηση: $1/2^+$, 0^+ , $5/2^+$, $7/2^-$, $3/2^-$