

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΣΕΙΡΕΣ ΣΥΜΑΡΤΗΣΕΩΝ

Γενικά μια ακολουθία είναι μια απεικόνιση

$$\mathbb{N} \longrightarrow X \neq \emptyset$$

$$v \longmapsto x_v$$

και συμβολίζεται με (x_v) , ενώ μιλάμε για ακολουθία στοιχείων του X

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ και $\Sigma(A, \mathbb{R}) = \{f: A \rightarrow \mathbb{R}\}$. Τότε ορίζουμε ακολουθία

$$\mathbb{N} \longrightarrow \Sigma(A, \mathbb{R})$$

$$v \longmapsto f_v$$

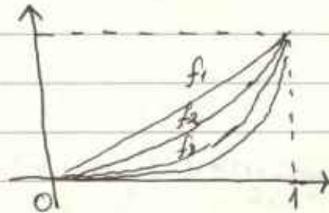
και συμβολίζουμε με (f_v) , A ή $(f_v)/A$

π.χ. $f_v(x_v) = x^v / [0, 1]$

$$f_1: f_1(x) = x, \quad x \in [0, 1]$$

$$f_2: f_2(x) = x^2 \quad \text{---}$$

$$f_3: f_3(x) = x^3 \quad \text{---}$$



π.χ. $f_v(x) = v^2 x (1-x)^v, \quad x \in [0, 1]$

$$f_1(x) = x(1-x)$$

$$f_2(x) = 4x(1-x)^2$$

$$f_3(x) = 9x(1-x)^3$$

Οπρ. Θα λέμε ότι η $(f_v)/A$ συγκλίνει απλά ή κατά ευθεία στη συνάρτηση

f/A , αν $(\forall x \in A) (f_v(x) \rightarrow f(x))$. Η σύγκλιση συμβολίζεται με

$$f_v \rightarrow f, A$$

ή $(f_v \rightarrow f, A) \Leftrightarrow (\forall x \in A) (f_v(x) \rightarrow f(x)) \Leftrightarrow$

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists v_0 \in \mathbb{N}) (\forall v > v_0) (\forall x \in A) (|f_v(x) - f(x)| < \epsilon)$$

π.χ. $f_v(x) = x^v, x \in [0, 1]$. (Μελέται στο γράφημα)

$$\left. \begin{array}{l} x=0, f_v(0) = 0^v = 0 \rightarrow 0 \\ x=1, f_v(1) = 1^v = 1 \rightarrow 1 \\ x \in (0, 1), f_v(x) = x^v \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{για } v \rightarrow +\infty$$

Επομένως $f_v \rightarrow f, [0, 1], f: f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

π.χ. $f_v(x) = v^2 x(1-x)^v, x \in [0, 1]$

$$x=0, f_v(0) = 0 \rightarrow 0$$

$$x=1, f_v(1) = 0 \rightarrow 0$$

$$x \in (0, 1), f_v(x) = v^2 x(1-x)^v$$

Παρατηρήσεις:

- $0 < 1-x < 1 \rightarrow (1-x)^v \rightarrow 0$

- $v^2 \rightarrow +\infty$

- Αν $\sum a_n$ συγκλίνει τότε $a_n \rightarrow 0$

Για $x \in (0, 1)$ έχουμε τη σειρά πραγματικών $\sum_{v=1}^{\infty} v^2 x(1-x)^v$ (1)

Από το κριτήριο των D'Alembert

$$\frac{f_{v+1}(x)}{f_v(x)} = \frac{(v+1)^2 x(1-x)^{v+1}}{v^2 x(1-x)^v} = \frac{(v+1)^2}{v^2} (1-x) \xrightarrow{v \rightarrow +\infty} 1-x$$

Επομένως η (1) συγκλίνει, ορα $v^2 x(1-x)^v \xrightarrow{v \rightarrow +\infty} 0$

Τελικά, $f_v \rightarrow f, [0, 1]$, όπου $f(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$

Υπερσύνταξη Αν $\sum a_n$ συγκλίνει, τότε $a_n \rightarrow 0$

Το αντίστροφο δεν ισχύει, π.χ. $\frac{1}{v} \rightarrow 0$ αλλά $\sum \frac{1}{v} = +\infty$

Παρατήρηση Η απλή σύγκλιση (συνήθως) ΔΕΝ μεταφέρει τις ιδιότητες των συναρτήσεων f_v στην οριακή συνάρτηση

Ομοιομορφή Συγκλιση Ακολουθιας Συναρτησεων

ορσ. Έστω $(f_n), A$. Η (f_n) συγκλίνει ομοιομορφα στην f πάνω στο A , αν
 $(\forall \epsilon > 0) (\exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \cup \mathbb{R}) (\forall n > n_0(\epsilon)) (\forall x \in A) (|f_n(x) - f(x)| < \epsilon) \Leftrightarrow (f_n \Rightarrow f, A)$
 όπως
 $(\forall x \in A) (\forall \epsilon > 0) (\exists n_0(\epsilon, x) \in \mathbb{R} \cup \mathbb{N}) (\forall n > n_0(\epsilon, x)) (|f_n(x) - f(x)| < \epsilon) \Leftrightarrow (f_n \rightarrow f, A)$

Παρατ. 1. $(f_n \Rightarrow f, A) \Leftrightarrow (\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0)$

2. Αν $f_n \Rightarrow f, A$ τότε $f_n \rightarrow f, A$

π.χ. $f_n(x) = v^n x(1-x)^v, x \in [0, 1]$

• (Γνωρίζουμε ότι $f_n \rightarrow f = 0, [0, 1]$)

• Από την παρατ. 1, αρκεί. ν.δ.ο $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = \max_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = \max_{x \in [0, 1]} f_n(x)$

• $f'_n(x) = v^2(1-x)^v - v^3 x(1-x)^{v-1} = v^2(1-x)^{v-1}(1-x-vx) = 0 \Rightarrow$
 $1-x-vx=0 \Leftrightarrow 1-x(v+1)=0 \Rightarrow x = \frac{1}{v+1}$

$$f_n\left(\frac{1}{v+1}\right) = v^2 \left(\frac{1}{v+1}\right) \left(1 - \frac{1}{v+1}\right)^v = v^2 \frac{1}{v+1} \left(\frac{v}{v+1}\right)^v$$

$$= \frac{v}{v+1} \cdot v \dots \frac{1}{(1+\frac{1}{v})^v} = (1+\infty) \left(\frac{1}{e}\right) = +\infty$$

αοα $f_n \not\Rightarrow f, [0, 1]$

π.χ. $f_n(x) = x + \frac{x}{v}, x \in [a, b]$

• Ανάμ. σύγκλιση: $f_n(x) = x + \frac{x}{v} \xrightarrow{v \rightarrow +\infty} x \Rightarrow f_n \rightarrow f, [a, b]: f(x) = x$

• Ομοι. σύγκλιση: Αρκεί να εξετάσουμε την $a_n = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|$

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in [a, b]} \left| x + \frac{x}{v} - x \right| = \max_{x \in [a, b]} \frac{|x|}{v}$$

$$= \frac{\max\{|a|, |b|\}}{v} = \frac{M}{v} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Η σύγκλιση είναι ομοιομορφη}$$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

1. Έστω $(f_n), A, f/A$. Τότε

$$(f_n \Rightarrow f, A) \Leftrightarrow (\exists (\epsilon_n): \epsilon_n > 0, \epsilon_n \rightarrow 0) (\forall x \in A) (|f_n(x) - f(x)| < \epsilon_n)$$

Απόδειξη

• Έστω ότι $f_n \Rightarrow f, A$. Τότε $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$

$$\text{Οπως } |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = \epsilon_n, \forall x \in A$$

• Έστω ότι $\exists (\epsilon_n): \epsilon_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

$$(\epsilon_n \rightarrow 0) \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) (\exists \nu_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \cap \mathbb{R}) (\forall n > \nu_0(\epsilon)) (|\epsilon_n| = \epsilon_n < \epsilon) \Leftrightarrow (\forall x \in A) (|f_n(x) - f(x)| < \epsilon_n < \epsilon)$$

π.χ. $f_n(x) = \frac{n! \nu x}{\sqrt{\nu}}, x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet \text{ Απλή σύγκλιση: } \left. \begin{array}{l} \nu=1: f_1(x) = n!x \\ \nu=2: f_2(x) = \frac{n!2x}{\sqrt{2}} \\ \vdots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Για σταθερό } x \in \mathbb{R} \\ f_n(x) = \frac{n! \nu x}{\sqrt{\nu}} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0, \mathbb{R} \end{array}$$

$$\text{Επειδή } |f_n(x) - 0| = |f_n(x)| = \frac{n! \nu |x|}{\sqrt{\nu}} \leq \frac{1}{\sqrt{\nu}} \rightarrow 0 \Rightarrow f_n \Rightarrow 0, \mathbb{R}$$

2. Κριτήριο Cauchy Έστω $(f_n), A$. Τότε

$$(f_n \Rightarrow f, A) \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) (\exists \nu_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \cap \mathbb{R}) (\forall \mu, \nu > \nu_0(\epsilon)) (\forall x \in A) (|f_\nu(x) - f_\mu(x)| < \epsilon)$$

Παρατήρηση



$$(f_n \Rightarrow f, A) \Leftrightarrow$$

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists \nu_0(\epsilon) \in \mathbb{N}) (\forall \nu > \nu_0(\epsilon)) (\forall x \in A)$$

$$(f(x) - \epsilon < f_\nu(x) < f(x) + \epsilon)$$

Αυτό δε συμβαίνει στην απλή σύγκλιση.

Ομοιομορφή Συγκλιση και Συνεχεια

Θεωρ. Έστω $(f_n), f|A$ και $x_0 \in A$. Αν $f_n \Rightarrow f, A$ και $(f_n$ συνεχής στο x_0) ($\forall n \in \mathbb{N}$) τότε η f είναι συνεχής στο x_0 .

Παρατ. Το παραπάνω μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο μη ομοιόμορφης σύγκλισης

π.χ. $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1]$
 $f_n \rightarrow f, [0, 1] : f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

Οι $f_n, n \in \mathbb{N}$ είναι συνεχείς στο $x_0 = 1$. Η οριακή συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , επομένως η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0, 1]$

π.χ. $f_n(x) = \frac{2}{\pi} \omega \int \exp(\nu x), x \in \mathbb{R}$
Έχει δείχθει ότι $f_n \rightarrow f, \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

Οι $f_n, n \in \mathbb{N}$ είναι συνεχείς στο 0 ενώ η f όχι, άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Ομοιομορφή Συγκλιση και Ολοκλήρωση

Θεωρ. Έστω $(f_n), f| [a, b]$ και $f_n \in \mathcal{R}[a, b], n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \Rightarrow f [a, b]$ τότε $f \in \mathcal{R}[a, b]$:
i) $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$, ii) $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt \Rightarrow \int_a^x f(t) dt, [a, b]$

Ομοιομορφή Συγκλιση και Παραγωγή

Θεωρ. Έστω $(f_n)|I, f_n'|I$. Αν $f_n' \Rightarrow g$ και $\exists f \in I: (f_n(x))$ συρτάται τότε
η $(f_n) \Rightarrow f, I$ και $f'(x) = g(x), x \in I$
($I = [a, b]$ ή $[a, b)$ ή $(a, b]$ ή (a, b))

ΣΕΙΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Γοχίει $f_1 + f_2 + \dots + f_n = (f_1 + f_2 + \dots + f_n)(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$

Σειρά συναρτήσεων: $\sum_1^{+\infty} f_n(x)$, f_n/A

Ακόλ. Μερικών Αθροισμάτων: $S_n = f_1 + \dots + f_n/A$, $S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$

Ορο. Η σειρά $\sum f_n/A$ συγκλίνει απλά ή κατά σημείο αν και μόνο αν
 $(\forall x \in A) (\sum f_n(x) = f(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in A) (S_n(x) \rightarrow f(x))$

π.χ. $\sum_0^{+\infty} x^n$, $f(x) = x^n$ συγκλίνει $\forall x \in (-1, 1)$, $\sum_0^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = f(x)$

π.χ. Συναρτησιές $\sum_0^{+\infty} a_n x^n$ (κύρια αντιστρέφονται σε σειράν συναρτήσεων)

ΠΡΑΞΕΙΣ ΑΠΛΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

Αν $\sum_k^{+\infty} f_k = f, A$ και $\sum_k^{+\infty} g_k = g, A$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τότε
 $\sum_k^{+\infty} (\lambda f_k + \mu g_k) = \lambda f + \mu g, A$

Ορο. Η σειρά $\sum f_n/A$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f/A πάνω στο A
αν η $(S_n), A$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f πάνω στο A . Γράφουμε
 $\sum f_n \stackrel{ob.}{=} f, A \Leftrightarrow S_n \Rightarrow f, A$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

Αν $\sum_k^{+\infty} f_k \stackrel{ob.}{=} f, A$ και $\sum_k^{+\infty} g_k \stackrel{ob.}{=} g, A$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε
 $\sum_k^{+\infty} (\lambda f_k + \mu g_k) \stackrel{ob.}{=} \lambda f + \mu g, A$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΣΕΙΡΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Κριτήριο Cauchy Η $\sum f_n, A$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A αν και μόνο αν
 $(\forall \epsilon > 0) (\exists \nu_0(\epsilon) \in \mathbb{N}) (\forall \mu, \nu > \nu_0(\epsilon) : \nu > \mu) (\forall x \in A) (|\sum_{\mu+1}^{\nu} f_i(x)| < \epsilon)$

Ορισ. Η $\sum f_n, A$ συγκλίνει απολύτως στο A αν η $\sum |f_n|, A$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A .

Θεωρ. Αν η $\sum |f_n|, A$ συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε και η $\sum f_n, A$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Απόδειξη

$$-|f_n(x)| \leq f_n(x) \leq |f_n(x)| \Leftrightarrow 0 \leq f_n(x) + |f_n(x)| \leq 2|f_n(x)|, \forall x \in A$$

Αφού η $\sum |f_n(x)|$ συγκλίνει $\forall x \in A$, από το κριτήριο σύγκλισης για θετικές πραγματικών αριθμών, τότε

η $\sum (f_n(x) + |f_n(x)|)$ συγκλίνει $\forall x \in A$

οπότε συγκλίνει και η $\sum (f_n(x) + |f_n(x)| - |f_n(x)|) = \sum f_n(x) \forall x \in A$

Θεωρ. Αν η $\sum |f_n|$ συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε η $\sum f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

2. M-Κριτήριο (2) (Weierstrass)

Έστω $(f_n), A : |f_n(x)| \leq M_n, \forall x \in A$.

Αν η $\sum M_n$ συγκλίνει, τότε η $\sum |f_n|, A$ συγκλίνει ομοιόμορφα
 οπότε η $\sum f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A .

Απόδειξη

$(\sum M_n \text{ συγκλ.}) \xleftrightarrow{\text{Cauchy}} (\forall \epsilon > 0) (\exists \nu_0(\epsilon) \in \mathbb{N}) (\forall \mu > \rho > \nu_0(\epsilon)) (|\sum_{\mu+1}^{\rho} M_i| < \epsilon)$
 Επειδή $\sum_{\mu+1}^{\rho} |f_i(x)| \leq \sum_{\mu+1}^{\rho} M_i, \forall x \in A$, έχουμε δείξει ότι

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists \nu_0(\epsilon) \in \mathbb{N}) (\forall \mu > \rho > \nu_0(\epsilon)) (\forall x \in A) (\sum_{\mu+1}^{\rho} |f_i(x)| < \epsilon)$$

σύμφωνα με το κριτ. Cauchy η $\sum |f_n|$ συγκλίνει ομοιόμορφα,
 οπότε και η $\sum (f_n), A$ συγκλίνει ομοιόμορφα

π.χ. $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n, [-\epsilon, \epsilon], \epsilon < 1$

$|f_n(x)| = |x^n| \leq \epsilon^n = M_n$

Επειδή $\sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon^n$ συγκλίνει, ως γεωμετρική με λόγο $\epsilon < 1$, έπεται από Μ-κριτήριο ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n, [-\epsilon, \epsilon]$ συγκλίνει ομοιόμορφα $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \stackrel{\text{ομ.}}{=} \frac{1}{1-x}, [-\epsilon, \epsilon]$

π.χ. $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n, [-\epsilon, \epsilon], 0 < \epsilon < 1$

Γοχύει $|n! x| \leq k \Rightarrow 0 < |n! x^n| \leq |x|^n = \epsilon^n, \forall x \in \mathbb{R} \cup [-\epsilon, \epsilon]$

Ομοίως η $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα, όπως δε γνωρίζουμε την οριακή

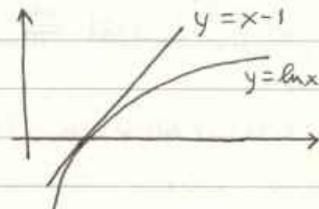
π.χ. $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+x^n), [0, \epsilon], (0 < \epsilon < 1)$

Γοχύει $\ln x \leq x, \forall x > 0$

οπότε $0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n \leq \epsilon^n$

It $\sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon^n$ συγκλίνει Μ-κρ. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+x^n)$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, \epsilon]$



π.χ. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμ. στο $[0, 1], f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln x, & x \in (0, 1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$|f_n(x)| = x^n \ln x \rightarrow |f_n(x)|' = -\frac{n x^{n-1} \ln x}{x} - \frac{x^{n-1}}{x} = -x^{n-1} (\ln x + \frac{1}{x})$

• Εξετάζουμε τα εσωτερικά επιπέδια στο $(0, 1)$:

$\ln x + \frac{1}{x} = 0 \rightarrow \ln x = -\frac{1}{x} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{x}}$

$\ln x + \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow \ln x < \ln e^{-\frac{1}{x}} \Rightarrow x < e^{-\frac{1}{x}}$

$\ln x + \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \ln x > \ln e^{-\frac{1}{x}} \Rightarrow x > e^{-\frac{1}{x}}$

Αρα στο $x = e^{-\frac{1}{x}}$ υπάρχει βέγ. στο, $f_n(e^{-\frac{1}{x}}) = \frac{(e^{-\frac{1}{x}})^n (e^{-\frac{1}{x}})^{-1}}{e^{1/x}}$

• Εξετάζουμε τα άκρα $f_n(0) = 0, f_n(1) = 1$

Αρα $|f_n(x)| \leq \frac{1}{e^{1/x}}$, $\forall x \in [0, 1]$ συγκλίνει, αρα από Μ-κριτ. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), [0, 1]$ συγκλ. ομοιόμορφα.

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Θέωρ. Έστω $\sum f_n \stackrel{op.}{=} f$, A και $x_0 \in A$. Αν οι $f_n, n \in \mathbb{N}$ είναι συνεχείς στο x_0 τότε η f είναι συνεχής στο x_0

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Θέωρ. Έστω $\sum f_n \stackrel{op.}{=} f, [a, b]$ και $f_n \in R[a, b] \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$i) \sum \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (\sum f_n(x)) dx$$

$$ii) \sum \int_a^x f_n(t) dt \stackrel{op.}{=} \int_a^x f(t) dt, x \in [a, b]$$

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

Θέωρ. Έστω $(f_n), (f'_n) / I$. Αν $\sum f'_n \stackrel{op.}{=} g, I$ και $\exists f \in I: \sum f_n = f$ συγκλίνει. Τότε

$$\sum f_n \stackrel{op.}{=} f, I \text{ και } f' = g, I$$

($I = [a, b]$ ή $[a, b)$ ή $(a, b]$ ή (a, b))

3. Θεώρημα Dirichlet

Έστω $(f_n), k$ (συμπραγές) και $n(f_n), k$ μονότονη και συνεχής $\forall n \in \mathbb{N}$.

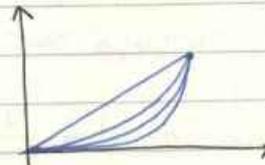
Έστω $f_n \rightarrow f, k$, τότε $(n \text{ συμπραγές είναι ομοιόμορφη}) \Leftrightarrow (f \text{ συνεχής})$

Παρατ. Αν το k δεν είναι συμπραγές το Θεωρ δεν ισχύει πάντα.

π.χ. $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1)$

$f_n \rightarrow 0, x \in [0, 1)$ και $f_{n+1} \leq f_n$

αλλά $f_n \not\rightarrow 0, [0, 1)$



4. Θεώρημα Weierstrass

Έστω $C[a, b]$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στο $[a, b]$ και $P[a, b]$ το σύνολο όλων των πολυωνύμων περιορισμένων στο $[a, b]$. Τότε, $(\forall \varepsilon > 0) (\forall f \in C[a, b]) (\exists p \in P[a, b]) (\forall x \in [a, b]) (|f(x) - p(x)| < \varepsilon)$.
Αν εφαρμόσουμε το θεωρ. διαδοχικά για $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ και για κάποια σταθερή $f \in C[a, b]$, τότε βρίσκουμε μια ακολουθία πολυωνύμων $p_n \in P[a, b]$: $p_n \rightarrow f, [a, b]$

Απόδειξη

Έστω συγκεκριμένη f .

$$n=1: (\exists p_1 \in P[a, b]) (\forall x \in [a, b]) (|f(x) - p_1(x)| < \frac{1}{2})$$

$$n=2: (\exists p_2 \in P[a, b]) (\forall x \in [a, b]) (|f(x) - p_2(x)| < \frac{1}{3})$$

⋮

$$n=k: (\exists p_k \in P[a, b]) (\forall x \in [a, b]) (|f(x) - p_k(x)| < \frac{1}{k})$$

Ορίζουμε ακολουθία (p_n) , $[a, b]$ με την παραπάνω ιδιότητα.

Ισχύει $(\frac{1}{n} \rightarrow 0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}) (\forall n > n_0(\varepsilon)) (\frac{1}{n} < \varepsilon)$, άρα
(Για το $\varepsilon > 0$) $(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}) (\forall n > n_0(\varepsilon)) (\forall x \in A) (|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon)$

ή $p_n \Rightarrow f, [a, b]$

5. Θεώρημα Abel.

Έστω η $\sum p_n f_n$, όπου $(p_n)/A$ μονότονη και ομοόμορφα φραγμένη
Ωπλ. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A$ $|f_n(x)| \leq M$ και $(f_n)/A$: $\int f_n$ συγκλίνει ομοόμορφα στο A . Τότε η $\sum p_n f_n$ συγκλίνει ομοόμορφα στο A .

π.χ (*) Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ μια δυναμοσειρά με διάστημα σύγκλισης το $(-1, 1)$.
Αν η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x=1)$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομοόμορφα στο $[0, 1]$.
Πραγματι, για $p_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$ ισχύει $p_{n+1} \leq p_n$ (μονότονη) και $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in [0, 1]) (|p_n(x)| \leq 1)$ (οπ. φραγτ.)
Αν $f_n(x) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 1]$, τότε αφού η $\sum a_n$ συγκλίνει (από υποθέση) η $\sum f_n$ συγκλίνει ομοόμορφα στο $[0, 1]$. Από Θ-Abel η $\sum a_n x^n$ συγκλίνει ομοόμορφα στο $[0, 1]$

Αν η $\sum (-1)^n a_n (x=-1)$ συγκλίνει, τότε η $\sum a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[1, 0]$, αφού η σειρά της $\sum a_n x^n$ είναι ισοδύναμη με της $\sum (-1)^n a_n x^n$, οπότε εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα στο $\sum (-1)^n a_n x^n$, $[0, 1]$

Αν το διάστημα σύγκλισης της $\sum a_n x^n$ είναι $(-R, R)$, $R \in \mathbb{R}$ και η $\sum a_n R^n$ συγκλίνει, τότε η $\sum a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, R]$. Το θεώρημα είναι ίδιο με το παραπάνω, αφού η σειρά της $\sum a_n x^n$ στο $[0, R]$ είναι ισοδύναμη με της $\sum a_n R^n x^n$, $x \in [0, 1]$

Αν η $\sum (-1)^n a_n R^n (x=-R)$ συγκλίνει τότε η $\sum a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-R, 0)$ (ισοδύναμη με τις $\sum a_n x^n$, $\sum (-1)^n a_n x^n$)

Επομένως, αν η $\sum a_n x^n$, $(-R, R)$ συγκλίνει στα άκρα $x=R, x=-R$ τότε η $\sum a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-R, R]$

Θεωρ. Αν $\sum f_n \stackrel{ot}{=} f$, A_1 και $\sum f_n \stackrel{ot}{=} f$, A_2 τότε $\sum f_n \stackrel{ot}{=} f$, $A_1 \cup A_2$

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

με κέντρο
στο 0

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$$

με κέντρο
στο x_0

$a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$: Συντελεστές δυναμ.

- Παρατηρ. 1. Η $\sum a_n (x-x_0)^n$ αναγεται στην $\sum a_n y^n$ αν $y = x - x_0$
2. Οι $f_n(x) = a_n x^n$ ορίζονται στο \mathbb{R} και είναι απείρες φορές παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} : $f'_n(x) = n \cdot a_n x^{n-1}$, $f_n^{(n)}(x) = n!$ αν
αρα $f_n^{(n+1)}(x) = 0$, $f_n^{(n)}(x) = 0$
3. Οι θέρμες αυτές συγκλίνουν για $x = x_0$ ή 0 και δίνουν:
 $\sum_0^{+\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$, $\sum a_n \cdot 0^n = a_0$, $\sum_{n \geq 1} a_n \cdot 0^n = 0$
Αυτό δε βεβαιώνει ότι η $\sum a_n x^n$ συγκλίνει $\forall x \in \mathbb{R}$.

Με το κριτήριο ρίγας του Cauchy $\lim \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x|^n = |x| \cdot \lim \sqrt[n]{|a_n|}$

1. Αν $\lim \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x|^n = |x| \cdot \lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, τότε $\sum |a_n| |x|^n$ συγκλίνει
δηλ. η $\sum a_n x^n$ συγκλίνει αστοχίτως για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα
οποία $|x| \cdot \lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$
2. Αν $\lim \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x|^n = |x| \cdot \lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, τότε η $\sum |a_n| |x|^n$ αποκλίνει
δηλ. η $\sum a_n x^n$ αποκλίνει για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία ισχύει
 $|x| \cdot \lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$.
3. Αν $\lim \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x|^n = |x| \cdot \lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, τότε δεν μπορούμε να
αποφανθώμε για τη συμπεριφορά της $\sum a_n x^n$, δηλ. για εκείνα
τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία $|x| \cdot \lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθώ
με για τη συμπεριφορά της $\sum a_n x^n$
4. Αν $\lim \sqrt[n]{|a_n|} \neq +\infty$, $|x| \cdot \lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$ και
 $|x| \cdot \lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$

Ορισ. Ακτίνα σύγκλισης (R) της δυναμοσειράς $\sum a_n x^n$ είναι η ποσότητα

$$R = \begin{cases} 0 & , \text{ αν } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \\ \infty & , \text{ αν } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} & , \text{ αν } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0 \end{cases}$$

Παραπ. Θεώρημα Cauchy-Hadamard

i) Για $|x| < R$ η $\sum a_n x^n$ συγκλίνει απολύτως

ii) Για $|x| > R$ η $\sum a_n x^n$ αποκλίνει

iii) Για $|x| = R$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τη σύγκλιση της $\sum a_n x^n$ και την εξετάζουμε χωριστά

Ορισ. Το $(-R, R)$ ονομάζεται διάστημα σύγκλισης ($\Delta.S$) της $\sum a_n x^n$

Ορισ. Το διάστημα Δ που προκύπτει από την εξέταση της σύγκλισης της $\sum a_n x^n$ στα άκρα $-R, R$ και περιέχει όλα τα σημεία σύγκλισης της $\sum a_n x^n$ ονομάζεται ακριβές διάστημα σύγκλισης ($\Delta.A.S$) ή σύνολο σύγκλισης της $\sum a_n x^n$

π.χ. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^v}$, $\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n^v}} = \overline{\lim} n^{-\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{n} = \lim \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow \Delta.S = (-1, 1)$

$x=1$ Ο.Ε.Τ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^v} = +\infty$, $x=-1$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^v}$ κριτ. Leibniz συγκλίνει $\Rightarrow \Delta.A.S = [-1, 1)$

π.χ. Έστω $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ με $\Delta.S = (-R, R)$ και $\Delta = \Delta.A.S$

Ορίζεται μια συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Θέλουμε να μελετήσουμε την f ως προς τη συνέχειά και την παραγωγισιότητα στο Δ .

Θέωρ.

Αν $K \subseteq (-R, R)$ συμπαγές σύνολο, τότε η $\sum a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον f στο K .

Απόδειξη

Έστω συμπαγές $K \subseteq (-R, R)$. Τότε $\exists \max K = \mu$ και $\max K = \lambda$ όπου $\mu, \lambda \in (-R, R)$. Έστω $M = \max \{|\mu|, |\lambda|\}$. Τότε $|x| \leq M, \forall x \in K$. Οπότε $|x|^n \leq M^n$ και $0 \leq |a_n| \cdot |x|^n \leq |a_n| \cdot M^n \forall x \in K, \forall n \in \mathbb{N}$

Επειδή $M \in (-R, R)$ και η $\sum a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(-R, R)$

έπεται ότι η $\sum |a_n| M^n$ συγκλίνει (από M -κρίτήριο) \Rightarrow

η $\sum a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K , δηλ

$$\sum a_n x^n \stackrel{\text{ολ.}}{=} f, \quad K$$

Επειδή $\forall x \in (-R, R)$ μπορεί να θεωρηθεί εσωτερικό σημείο συμπαγούς υποσυνόλου του $(-R, R)$, έστω K

στο $[x-\epsilon, x+\epsilon]$ η σύγκλιση $\sum a_n x^n \stackrel{\text{ολ.}}{=} f, K$ είναι ομοιόμορφη

και επειδή οι συναρτήσεις είναι συνεχείς ($f_n(x) = a_n x^n$)

στο x έπεται ότι η f είναι συνεχής στο $x \forall x \in (-R, R)$

Παρατήρηση

Αν $x=R$ ή $x=-R$, τότε, όπως είδαμε στο παραδείγμα (*)

η σύγκλιση $\sum a_n x^n = f$ είναι ομοιόμορφη στο $[0, R]$ ή στο

$[-R, 0]$ οπότε η f είναι συνεχής από αριστερά (ή δεξιά) στο σημείο R (ή $-R$)

$$\sum a_n x^n = f, \Delta = A \Delta \Sigma \Rightarrow f \text{ συνεχής στο } \Delta$$

Πρόταση

Έστω $\sum a_n x^n = f, \Delta$. Τότε $(\forall x \in \Delta) (\int_0^x f(t) dt = \sum a_n \int_0^x t^n dt = \sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1})$

Απόδειξη

Το $[0, x]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Δ , άρα $\sum a_n x^n \stackrel{\text{ολ.}}{=} f, [0, x]$

Από γν. θεωρήματα $\int_0^x f(t) dt = \sum a_n \int_0^x t^n dt = \sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Αν $\sum a_n x^n = f, \Delta$, τότε $\forall x \in \Delta \int_0^x f(t) dt = \sum a_n \int_0^x t^n dt$

Παρατήρηση

Αντί για 0 μπορούμε να πάρουμε τυχόν $a \in (-R, R)$, δηλ $\int_a^x f(t) dt = \sum a_n \int_a^x t^n dt$

Ερω. 11 $\sum_{0}^{+\infty} a_n x^n$ και $n \sum_{1}^{+\infty} v \cdot a_n x^{v-1}$ έχουν ίδια ακτίνα σύγκλισης

Απόδειξη

Έστω ακτίνες $\sqrt[n]{|a_n|}$, $\sqrt[n]{v|a_n|}$.

Έστω $R_1 = \liminf \sqrt[n]{|a_n|}$ $\left\{ \begin{array}{l} R_1 = R_2 \text{ γιατί:} \\ R_2 = \liminf \sqrt[n]{v|a_n|} \end{array} \right.$

Έστω $\sqrt[k_v]{|a_{k_v}|} \rightarrow a$, τότε $\sqrt[k_v]{k_v |a_{k_v}|} = \sqrt[k_v]{k_v} \cdot \sqrt[k_v]{|a_{k_v}|} \rightarrow a$

$\forall v \sqrt[k_v]{k_v |a_{k_v}|} \rightarrow b$, τότε $\sqrt[k_v]{\frac{1}{k_v}} \cdot \sqrt[k_v]{k_v} \cdot \sqrt[k_v]{|a_{k_v}|} \rightarrow b \Leftrightarrow \sqrt[k_v]{|a_{k_v}|} \rightarrow b$

• $f(x) = \sum_{0}^{+\infty} a_n x^n$

$(-R, R)$, $\Delta = A.A.S$

• $f'(x) = \sum_{1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

$(-R, R)$, $\Delta^{(1)} = A.A.S$ ($= f'(x)$)

• $f''(x) = \sum_{2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

$(-R, R)$, $\Delta^{(2)} = A.A.S$ ($= f''(x)$)

• \vdots

$(-R, R)$

• $f^{(k)}(x) = \sum_{k}^{+\infty} v(v-1)\dots(v-k+1) a_v x^{v-k}$, $(-R, R)$, $\Delta^{(k)} = A.A.S$ ($= f^{(k)}(x)$)

Το $(-R, R)$ παραμένει σταθερό. Ενδεχομένως να αλλάξει το A.A.S
θα εφαρμόσουμε το θεώρημα της παραγωγής

Έστω $\sum_{1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, $\Delta^{(1)}$. Η σύγκλιση είναι ορισμένη σε κάθε
συμπacts υποσύνολο του $\Delta^{(1)}$

Έστω $\sum_{1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = g(x)$, $\Delta^{(1)}$. Επειδή $\forall f \in (R, R)$ η $\sum a_n f^n$ συγκλίνει
από το θ. παραγ. $\exists f \in \Delta^{(1)}$: $\sum a_n x^n \stackrel{\text{απ.}}{=} f(x)$, $x \in \Delta^{(1)}$, k συμπacts
και $f'(x) = g(x) \forall x \in \Delta^{(1)}$ αφού $\forall x \in \Delta^{(1)}$ μπορεί να εγκλωβιστεί
σε ένα συμπacts $K \subseteq \Delta^{(1)}$.

Ιδιαιτέρα: $f(x) = \sum a_n x^n$, $(-R, R)$

$f'(x) = \sum v \cdot a_n \cdot x^{v-1}$, $(-R, R)$

\vdots

$f^{(k)}(x) = \sum v(v-1)(v-2)\dots(v-k) a_n \cdot x^{v-k}$, $(-R, R)$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΑΣ

π.χ. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^{11}}{11} + \dots = f(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4n-1]{\frac{1}{4n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[4n-1]{4n-1}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4n-1]{4n-1}} = 1$$

Άρα $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4n-1]{(4n-1)^{-1}}} = 1$, δηλ. Δ.Σ = (-1, 1)

$$\left. \begin{array}{l} \bullet x=1: \sum \frac{1}{4n-1} = +\infty \\ \bullet x=-1: \sum \frac{(-1)^{4n-1}}{4n-1} = -\sum \frac{1}{4n-1} = -\infty \end{array} \right\} \text{Άρα Α.Δ.Σ} = (-1, 1)$$

Έστω $f(x) = \sum \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$

(Ολοκλήρωση ή παραγώγιση ώστε να αναχθεί σε γνωστ. σειρά)

- Παραγώγιση: $\forall x$ (εχόντι $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (4n-1) \frac{x^{4n-2}}{4n-1} = \sum x^{4n-2}$)

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \sum x^{4n} = \frac{1}{x^2} \sum (x^4)^n = \frac{1}{x^2} \frac{x^4}{1-x^4} = \frac{x^2}{1-x^4}$$

- Ολοκλήρωση: $\forall x \in (-1, 1) \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^4} dt$

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^4} dt = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - \frac{1}{2} \cot \epsilon \phi x$$

π.χ. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, R = +\infty$

Για $x=10 \rightarrow \int_0^{10} \frac{\sin x}{x} dx$ με εφέλιμα $< \frac{1}{10^5}$

Θέωρ. Αν $f(x) = \sum_0^{+\infty} a_n \cdot x^n$, $(-R, R)$ τότε $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

Γενικότερα, αν $f(x) = \sum_0^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ τότε $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$

Απόδειξη

Γιατί $f^{(k)}(x) = \sum_{v=k}^{+\infty} [v(v-1)\dots(v-k+1) \cdot a_v (x-x_0)^{v-k}]$, (x_0-R, x_0+R)

Αν θέσουμε $x=x_0$, $f^{(k)}(x_0) = k(k-1)\dots 1 \cdot a_k = k! a_k = 1 \Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

Παρατ. Αν θέλαμε να βρούμε τις παραγ. $f^{(k)}(x_0)$, $k \in \mathbb{N}$ αρκεί να αναπτύξω-
με την f σε μια δυναμοσειρά με κέντρο το x_0 , δηλ.
 $f(x) = \sum_0^{+\infty} a_n (x-x_0)^n \Rightarrow f^{(k)}(x_0) = a_k \cdot k!$

Πρόβλητ. Η παράσταση μιας f σε ένα (x_0-R, x_0+R) ως δυναμοσειρά με
κέντρο το x_0 είναι μοναδική, δηλ. αν $f(x) = \sum_0^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ και
 $f(x) = \sum_0^{+\infty} \beta_n (x-x_0)^n$, (x_0-R, x_0+R) τότε $(\forall n \in \mathbb{N}) (a_n = \beta_n)$

Απόδειξη

Πρακτικά, $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \beta_n$

Πρόβλητ. Έστω $f/(x_0-R, x_0+R) = I$ και $f \in C^\infty(I)$. Μπορούμε να αναπτύξω-
σουμε τη σειρά Taylor της f με κέντρο το x_0
 $\sum_0^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$

i) Η $\sum_0^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ συγκλίνει;

ii) Αν ναι, συγκλίνει στην $f(x)$;

Απάντησθ. Μερικές φορές όχι

π.χ. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, x \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Βρίσκεται ότι $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ και $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Η σειρά Taylor με κέντρο 0 είναι

$$\sum_0^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_0^{+\infty} 0 x^n = 0 \neq e^{-\frac{1}{x^2}} = f(x) \quad x \neq 0$$

Θέση.

Έστω $f \in C^\infty(I)$, $I = (x_0 - R, x_0 + R)$. Τότε

$$f(x) = \sum_0^{+\infty} \frac{f^{(v)}(x_0)}{v!} (x-x_0)^v, \quad x \in I \Leftrightarrow (T_v(f, x, x_0), I) \rightarrow 0 \quad \forall x \in I$$

($T_v(f, x, x_0)$: ακαθάρια υπολοίπων τύπου Taylor.)

Απόδειξη

Τύπος Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^v \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(v+1)}(\xi)}{(v+1)!} (x-x_0)^{v+1}, \quad \xi \text{ ανάμεσα στα } x_0, x$$

$$= \sum_{k=0}^v \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + T_v(f, x, x_0)$$

$$\text{Παύση } |f(x) - \sum_0^v \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k| = |T_v(f, x, x_0)|$$

$$|f(x) - S_v(x)| = |T_v(f, x, x_0)|$$

(Ικανή και αναγκαία συνθήκη για σύγκλιση δυναμοσειράς)

Θέση.

Έστω $f \in C^\infty(I)$, $I = (x_0 - R, x_0 + R)$ και ό,τι $(\exists M > 0)(\forall x \in I) (|f^{(n)}(x)| \leq M)$

Τότε $f(x) = \sum_0^{+\infty} \frac{f^{(v)}(x_0)}{v!} (x-x_0)^v, \quad x \in I$

Απόδειξη

Αρκεί ν.δ.ο. $T_v(f, x, x_0) \rightarrow 0 \quad \forall x \in I$

$$|T_v(f, x, x_0)| = \left| \frac{f^{(v+1)}(\xi)}{(v+1)!} (x-x_0)^{v+1} \right| \leq \frac{M |x-x_0|^{v+1}}{(v+1)!}$$

Έστω $n \sum \frac{|x-x_0|^{v+1}}{(v+1)!}$ Από κριτήριο λόγου D'Alembert

$$\frac{|x-x_0|^{v+1}}{(v+1)!} = \frac{|x-x_0|}{v+1} \xrightarrow{v \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

$$\text{άρα } \sum \frac{(x-x_0)^{v+1}}{(v+1)!} \text{ συγκλίνει } \Rightarrow \frac{|x-x_0|^{v+1}}{(v+1)!} \xrightarrow{v \rightarrow +\infty} 0$$

π.χ $f(x) = \sin x / \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$\|f^{(v)}(x)\| \leq 1 \quad \forall v \in \mathbb{N}$$

$$\text{Αρα } \sin x = \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{f^{(v)}(0)}{v!} x^v, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f(0) = \sin 0 = 0 \\ \bullet f'(0) = \cos 0 = 1 \\ \bullet f''(0) = -\sin 0 = 0 \\ \bullet f'''(0) = -\cos 0 = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^v \frac{x^{2v+1}}{(2v+1)!} + \dots \\ \sin x = \sum_{v=0}^{+\infty} (-1)^v \frac{x^{2v+1}}{(2v+1)!} \end{array}$$

$$\text{Υπάρχει } |\sin x - S_{2v+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2v+3}}{(2v+3)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \sin(-x) = -\sin x$$

π.χ $f(x) = \cos x / \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$\|f^{(v)}(x)\| \leq 1 \quad \forall v \in \mathbb{N}$$

$$\text{Αρα } \cos x = \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{f^{(v)}(0)}{v!} x^v, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f(0) = \cos 0 = 1 \\ \bullet f'(0) = -\sin 0 = 0 \\ \bullet f''(0) = -\cos 0 = -1 \\ \vdots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \cos x = \sum_{v=0}^{+\infty} (-1)^v \frac{x^{2v}}{(2v)!}, \quad x \in \mathbb{R} = \\ = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \cos(-x) = \cos x \end{array}$$

$$\eta \text{ αφοῦ } \sin x = \sum_{v=0}^{+\infty} (-1)^v \frac{x^{2v+1}}{(2v+1)!} \text{ \underline{να παρῶν}, } \cos x = \sum_{v=0}^{+\infty} (-1)^v \frac{x^{2v}}{(2v)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

π.χ $f(x) = e^x / \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} = \bigcup_{v=1}^{\infty} (-v, v)$

Ἐστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε $\exists v_0 \in \mathbb{N} : x \in (-v_0, v_0)$

$$\|f^{(v)}(x)\| = |e^x| < e^{v_0} = \text{const.} \quad \forall x \in (-v_0, v_0)$$

$$\text{Αρα } e^x = \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{f^{(v)}(0)}{v!} x^v = \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{x^v}{v!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

π.χ. $f(x) = \ln(1+x) \quad | \quad x > -1$

Για να προει ν' αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά

$$f(x) = \sum_{v=0}^{+\infty} a_v x^v \quad (-R, R)$$

πρέπει και η $f'(x)$ να αναπτύσσεται

$$f'(x) = \sum_{v=0}^{+\infty} a_v \cdot v \cdot x^{v-1} \quad (-R, R)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} \quad \frac{|x| < 1}{\sum_{v=0}^{+\infty} (-x)^v} = \sum_{v=0}^{+\infty} (-1)^v x^v$$

Άρα $f'(x) = \sum_{v=0}^{+\infty} (-1)^v x^v, \quad x \in (-1, 1)$

Για $x \in (-1, 1)$ ολοκληρώνουμε,

$$\int_0^x f'(t) dt = \sum_{v=0}^{+\infty} (-1)^v \int_0^x t^v dt$$

$$f(x) - f(0) = \sum_{v=0}^{+\infty} (-1)^v \frac{x^{v+1}}{v+1}, \quad x \in (-1, 1), \text{ αφού } f(0) = 0$$

$$f(x) = \sum_{v=0}^{+\infty} (-1)^v \frac{x^{v+1}}{v+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^v \frac{x^{v+1}}{v+1} + \dots$$

Παρατήρηση

$$f'(x) = \sum_{v=0}^{+\infty} (-1)^v x^v, \quad \text{Α.Δ.Σ} = (-1, 1)$$

$$f(x) = \sum_{v=0}^{+\infty} (-1)^v \frac{x^{v+1}}{v+1} : \quad x=1 \Rightarrow \sum_{v=0}^{+\infty} (-1)^v \frac{1}{v+1}, \text{ συγκλίνει}$$

$$x=-1 \Rightarrow - \sum_{v=0}^{+\infty} (-1)^{2v} \frac{1}{v+1} = - \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{1}{v+1}, \text{ δε συγκλίνει}$$

Άρα για την $f(x)$, Α.Δ.Σ = $(-1, 1]$

π.χ. $f(x) = \operatorname{arctg} x \quad | \quad \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x)^2} \quad \frac{|x| < 1}{\sum_{v=0}^{+\infty} (-x^2)^v} = \sum_{v=0}^{+\infty} (-1)^v x^{2v}$

Για $x \in (-1, 1)$, $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{v=0}^{+\infty} (-1)^v \frac{x^{2v+1}}{2v+1}$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \sum_{v=0}^{+\infty} (-1)^v \frac{x^{2v+1}}{2v+1}. \text{ Όπως } x=1 \Rightarrow \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{(-1)^v}{2v+1} \text{ συγκλίνει}$$

$$x=-1 \Rightarrow \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{(-1)^v (-1)^{2v+1}}{2v+1} = - \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{(-1)^v}{2v+1}, \text{ δε συγκλίνει}$$

Άρα Α.Δ.Σ = $[-1, 1]$, ενώ $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} = \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{(-1)^v}{2v+1}$

π.χ. $f(x) = (1+x)^a, a \in \mathbb{R}, f(x) = e^{a \ln(1+x)}, x > -1$

Για Maclaurin, στο διάστημα $(-1, 1)$

(1) $a \in \mathbb{N}$, τότε $(1+x)^a = \sum_{k=0}^a \binom{a}{k} x^k = \binom{a}{0} + \binom{a}{1}x + \dots + \binom{a}{a}x^a$

(2) $a=0$, τότε $(1+x)^0 = 1$

(3) $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

Η σειρά Maclaurin της f είναι $\sum_{v=0}^{\infty} \binom{a}{v} x^v$

όπου $\binom{a}{0} = 1, \binom{a}{v} = \frac{a(a-1)\dots(a-v+1)}{v!}$

$f(x) = (1+x)^a \Rightarrow f(0) = 1^a = 1$

$f'(0) = a(1+x)^{a-1}|_0 = a$

$f''(0) = a(a-1)(1+x)^{a-2}|_0 = a(a-1)$

$f^{(k)}(0) = a(a-1)\dots(a-k+1) = a(a-1)\dots(a-k+1)$

Αποδεικνύεται ότι

(1) Αν $a > 0$, τότε $(1+x)^a = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{a}{v} x^v, [-1, 1]$

(2) Αν $-1 < a < 0$, τότε $f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{a}{v} x^v, (-1, 1]$

(Στο $x=1$ η σειρά συγκλίνει στο συνολικά)

(3) Αν $a \leq -1$, τότε $f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{a}{v} x^v, (-1, 1)$

ΔΙΟΝΥΜΙΚΗ ΣΕΙΡΑ

Ν^ο αναπτύχθει σε Maclaurin (εξέδ.) η $f(x) = \arcsin x \in [-1, 1]$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

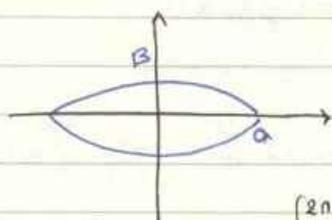
$$f''(x) = (1+(-y))^\nu \frac{|y| < 1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \binom{\nu-1/2}{\nu} (-y)^\nu = 1+y + \frac{(-1/2)(-1/2-1)y^2}{2!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1 \cdot x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^8 + \dots$$

$$\int_0^x f'(t) dt = \int_0^x dt + \frac{1}{2} \int_0^x t^2 dt + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \int_0^x t^4 dt + \dots = \arcsin x$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \dots \quad (-1, 1)$$

Υπολογισμός μήκους ελλείψης



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} \text{Μήκος ελλείψης} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \stackrel{a > b}{=} \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} dt \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 t} dt \stackrel{(a^2 - b^2)/a^2 = k^2}{=} a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} dt \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} = (1 - k^2 \cos^2 t)^{1/2} \quad k^2 \cos^2 t < 1, |x| < 1$$

$$(1 - k^2 \cos^2 t)^{1/2} = \sum_0^{+\infty} \binom{1/2}{\nu} (-k^2)^{\nu} \cos^{2\nu} t = 1 + \frac{1}{2} (-k^2) \cos^2 t + \frac{-1}{2^2} \frac{1}{2!} (-k^2)^2 \cos^4 t + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 2^2} \frac{1}{3!} (-k^2)^3 \cos^6 t + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} (-k^2 \cos^2 t) - \frac{1}{2^2} k^4 \cos^4 t + \dots + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{Μήκος ελλείψης} &= a \sum \int_0^{2\pi} \binom{1/2}{\nu} (-k^2)^{\nu} \cos^{2\nu} t dt \\ &= a \sum \binom{1/2}{\nu} (-k^2)^{\nu} I_{2\nu}, \quad I_{\nu} = \int_0^{2\pi} \cos^{\nu} x dx, \quad I_{\nu} = \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2} \end{aligned}$$

$$\text{Ίσχύει } I_{2\nu} = \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2\nu-1)}{4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2\nu)} \quad \forall \nu \geq 2, \quad I_{2\nu+1} = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Παράδειγμα: Αν η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ έχει Δ.Σ = $(-R_1, R_1)$ και η $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ έχει Δ.Σ = $(-R_2, R_2)$

τότε:

1) Η $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$ συγκλίνει για $x \in (-R, R)$ όπου $R = \min\{R_1, R_2\}$

2) Το κατά Cauchy γινόμενο $(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n x^n$
 όπου $\gamma_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$, συγκλίνει για $x \in (-R, R)$

Απόδειξη

1) Για $x \in (-R, R)$ οι $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ συγκλίνουν, άρα συγκλίνει και το άθροισμά τους

2) Ελέγξτε για $x \in (-R, R)$ από το Θ. Cauchy-Hadamard οι $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$ συγκλίνουν απόλυτως.

Από το Θ. Cauchy-Mertens έπεται ότι το γινόμενο

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n x^n\right)$$

συγκλίνει για $|x| < R$

π.χ $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n, (-1, 1)$, $-\sum_{n=0}^{+\infty} x^n, (-1, 1) \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (1-1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 x^n, \mathbb{R}$

π.χ $f(x) = (1+x)e^x$
 $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \mathbb{R}$, $e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$, $x \cdot e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!}, \mathbb{R}$

Άρα $e^{-x} \cdot x \cdot e^x = (1+x)e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!}$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{(n-1)!}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot n \cdot \frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{n!} \right] x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n + n(-1)^{n-1}}{n!} x^n, \mathbb{R}$$

π.χ. Ανάπτυξη $f(x) = \log x$ σε δυναμοσειρά Taylor με κέντρο $x_0 = 1$
 $\ln x = \sum_{v=0}^{+\infty} a_v (x-1)^v$

Θέτουμε $x-1=y \Leftrightarrow x=1+y$

$$\ln(1+y) = \sum a_v y^v \Rightarrow \ln(1+y) = \sum_0^{+\infty} (-1)^v \frac{y^{v+1}}{v+1}, \quad (-1, 1]$$

οπότε $1+y=x \Rightarrow \ln x = \sum_0^{+\infty} (-1)^v \frac{(x-1)^{v+1}}{v+1}$

$$\ln^{(v)}(1) = \frac{(-1)^v}{v!} = (-1)^{v-1} \cdot (v-1)!$$

$$f(x) = \sum_0^{+\infty} a_v (x-x_0)^v, \quad a_v = \frac{f^{(v)}(x_0)}{v!} \Rightarrow f^{(v)}(x_0) = a_v \cdot v!$$

π.χ. Ανάπτυξη $f(x) = \frac{1}{x^2}$ σε δυναμοσειρά Taylor με κέντρο $x_0 = 1$

$$\frac{1}{x^2} = \sum_0^{+\infty} a_v (x+1)^v \quad \frac{x+1=y}{y-1=x} \quad \sum a_v y^v$$

$$f(y) = \frac{1}{(y-1)^2} = \frac{1}{(1-y)^2} = \frac{1}{1-y} \cdot \frac{1}{1-y}$$

$$\sum_0^{+\infty} y^v = \frac{1}{1-y} \quad (\text{συντελεστής σε σχέση } y \text{ συγκρίνει με } |y| < 1)$$

Θέση

Θεώρημα Cauchy-Mertens

Αν $\sum_0^{+\infty} a_v = A$ και $\sum_0^{+\infty} b_v = B$ και για το άθροισμα συγκρίνει αριθμούς
 τότε $(\sum_0^{+\infty} a_v)(\sum_0^{+\infty} b_v) = \sum_0^{+\infty} \delta_v = A \cdot B$, $\delta_v = a_0 b_v + a_1 b_{v-1} + \dots + a_v b_0$

π.χ Στο προηγούμενο παράδειγμα, $(\sum_0^{+\infty} y^v)(\sum_0^{+\infty} y^v) = (1+y+y^2+\dots)(1+y+y^2+\dots)$

$$\text{Οπότε } |y| < 1, \quad \frac{1}{(1-y)^2} = (\sum_0^{+\infty} y^v)(\sum_0^{+\infty} y^v) = \sum_0^{+\infty} \delta_v y^v = \sum_0^{+\infty} (v+1) y^v$$

$$\text{Αφού } \delta_0 = a_0 b_0 = 1, \delta_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1+1=2 \dots \delta_v = v+1$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{x^2} = \sum_0^{+\infty} (v+1)(x+1)^v$$