



Εξετάσεις Θεωρίας Πιθανοτήτων
Φεβρουάριος 2001

Ζήτημα 1: ~~Α)~~ Τα χαρακτηριστικά X και Y ενός προϊόντος είναι ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή $N(25, 0.25)$ και $N(37, 0.36)$ αντίστοιχα. Το προϊόν θεωρείται "παραδεκτό" όταν πληρούνται οι προδιαγραφές: (A) $24.4 < X < 25.6$ και (B) $36.2 < Y < 37.8$. Όταν πληρούται μία μόνο από τις A, B το προϊόν θεωρείται "διορθώσιμο" και "απορριπτέο" όταν δεν πληρούται καμία. Να βρείτε τα ποσοστά:
(α) των παραδεκτών προϊόντων. (β) των διορθώσιμων και (γ) των απορριπτέων.

~~Β)~~ Αν A και B είναι δύο ξένα ενδεχόμενα με θετικές πιθανότητες, να εξετάσετε αν είναι ανεξάρτητα ή εξαρτημένα μεταξύ τους.

Ζήτημα 2: ~~Α)~~ Το ζεύγος τ.μ. (X, Y) έχει από κοινού σ.π.π. $f(x, y) = cxy$ για $x, y \in (0, 1)$ και μηδέν οπουδήποτε αλλού.

~~α)~~ Να βρείτε την σταθερά c.

~~β)~~ Να βρείτε την πιθανότητα $P[X < Y]$.

~~γ)~~ Να εξετάσετε αν οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες.

~~Β)~~ Για οποιεσδήποτε τ.μ. X, Y με πεπερασμένες διασπορές $V[X]$ και $V[Y]$, να δείξετε ότι: $V[X - Y] = V[X] + V[Y] - 2 \text{Cov}[X, Y]$.

Ζήτημα 3: A) Εστω X_i ($i = 1, \dots, n$) ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με κατανομή Rayleigh, δηλαδή με σ.π.π. $f(x) = \alpha x \exp\{-\frac{1}{2} \alpha x^2\}$, $x > 0$ ($\alpha > 0$).

~~α)~~ Να βρείτε την (κοινή) σ.π.π. των τ.μ. X_i^2

~~β)~~ Να βρείτε την σ.π.π. της τ.μ. $W = X_1^2 + \dots + X_n^2$.

B) Αν οι τ.μ. X_i ($i = 1, \dots, n$) ακολουθούν κατανομή Poisson $P(\lambda_i)$ αντίστοιχα και είναι ανεξάρτητες, να βρείτε την κατανομή της τ.μ. $Y = X_1 + \dots + X_n$.

Ζήτημα 4: ~~Α)~~ Ο χρόνος (σε ημέρες) εκτέλεσης μια παραγγελίας είναι τ.μ. X με κατανομή Γάμμα $G(a, p)$, όπου $a = 0.2$ και $p = 2$. Αν οι παραγγελίες εκτελούνται διαδοχικά, ποια η πιθανότητα ώστε ο ολικός χρόνος εκτέλεσης 20 τέτοιων παραγγελιών να μην υπερβαίνει τις 250 ημέρες. (Υπόδ. Χρησιμοποιήστε το Κ.Ο.Θ.)

B) Εστω $f_1(x)$ και $f_2(x)$ δύο σ.π.π. και α, β δύο θετικοί αριθμοί. Ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί α, β ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$ να είναι σ.π.π.: