

# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ «ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ»  
ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ  
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ / Κατεύθυνση Φυσικού Εφαρμογών

ΑΘΗΝΑ 5/2/2002, ΩΡΑ:08:30

## Θέμα 1<sup>ο</sup>

**A)** Να προσδιορίσετε αν είναι γραμμική, ημιγραμμική, σχεδόν γραμμική ή πλήρως μη γραμμική η διαφορική εξίσωση:

$$\cos^2 u_{x_1 x_2} + u_{x_1} + 2u^2 = 3x_2 u_{x_2} - \sin^2 u_{x_1 x_2}. \quad (0,5\mu\text{ov.})$$

Να βρεθεί η τάξη της.

**B)** Να βρεθεί ο τύπος της δ.ε.

$$u_{x_1 x_1} + x_2^2 u_{x_2 x_2} + u_{x_1} + 7u_{x_2} = 0. \quad (0,5\mu\text{ov.})$$

**Γ)** Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u(\rho, \varphi) = 0, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ u(1, \varphi) = \sin 3\varphi, \\ u(2, \varphi) = 7 \cos 2\varphi. \end{array} \right\} \quad (1,5\mu\text{ov.})$$

(Δίνεται ο διαφορικός τελεστής *Laplace* σε πολικές συντεταγμένες:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. )$$

## Θέμα 2<sup>ο</sup>

**A)** Να βρεθεί η μορφή της λύσης του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u(x_1, x_2) = 5x_1, \quad (x_1, x_2) \in (0,1) \times (0,2), \\ u(0, x_2) = u(1, x_2) = 0, \quad x_2 \in [0, 2], \\ u(x_1, 0) = u(x_1, 2) = 0, \quad x_1 \in [0, 1]. \end{array} \right\} \quad (0,75\mu\text{ov.})$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

**B)** Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u(\rho, \varphi) = 0, \quad 0 < \rho < 5, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \\ \frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}} \Big|_{\rho=5} = 6 \cos \varphi + 6 \sin \varphi + 7 \end{array} \right\} \quad (0,75\mu\text{ov.})$$

όπου  $\hat{\eta}$  είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο.

**Γ)** Να βρεθεί η συνάρτηση *Green* του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in (-\infty, +\infty) \times (-\infty, 0), \\ \frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}}(x_1, 0) = f(x_1), \end{array} \right\} \quad (1\mu\text{ov.})$$

όπου  $\hat{f}$  είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο.

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Δίνεται η θεμελιώδης λύση για το διαφορικό τελεστή Laplace στον  $\mathbb{R}^2$ :

$$E(x; x') = \frac{1}{2\pi} \ln[(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2]^{1/2}.$$

### Θέμα 3<sup>ο</sup>

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:

$$u_t(x, t) = 5u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 10, \quad t > 0,$$

$$u_x(0, t) = u_x(10, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = T \sin^2\left(\frac{\pi x}{10}\right), \quad 0 < x < 10, \quad T \text{ θετική σταθερα'}. \quad (2\mu\text{ov.})$$

### Θέμα 4<sup>ο</sup>

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y''(x) + y'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = y(1) = 0. \quad (2\mu\text{ov.})$$

Στη συνέχεια να λυθεί, με τη μέθοδο ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (εναλλακτική μέθοδος Fredholm), το ημιομογενές πρόβλημα:

$$y''(x) + y'(x) + 3y(x) = e^{-x/2}, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

### Θέμα 5<sup>ο</sup>

Με χρήση του συνημητονικού μετασχηματισμού Fourier, να βρεθεί η λύση υπό ολοκληρωτική μορφή, για το πρόβλημα της εξίσωσης Laplace:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad 0 < x, y < \infty,$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a, \\ 0, & a < x < \infty, \end{cases} \quad (1\mu\text{ov.})$$

$$u(x, y) \rightarrow 0 \text{ o'tαν } (x^2 + y^2) \rightarrow \infty.$$

Δίνονται:

$$1. \quad \mathcal{F}_C\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos(sx) dx = \hat{f}(s), \quad s > 0, \quad (\eta' F(s)),$$

$$2. \quad \mathcal{F}_C\{f''(x)\} = -s^2 \hat{f}(s) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0),$$

$$3. \quad \mathcal{F}_C^{-1}\{\hat{f}(s)\} = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}(s) \cos(sx) ds.$$