

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ «ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ»
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ / Κατεύθυνση Φυσικού

ΑΘΗΝΑ 17/10/2007, ΩΡΑ:15:00

Θέμα 1^ο:

(α) (Mov. 0.25). Να δοθεί η γενική μορφή της σχεδόν γραμμικής και της ημιγραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης σε διδιάστατα χωρία ($u = u(x_1, x_2)$):

(β) (Mov. 0.25). Να προσδιορίσετε τον τύπο της διαφορικής εξίσωσης:

$$u_{x_1 x_1} + x_2^2 u_{x_2 x_2} + 2x_1 x_2 u_{x_1 x_2} + e^{x_1} u_{x_1} - 1 = 0, \quad u = u(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

(γ) (Mov. 1.5). Να λυθεί το πρόβλημα:

$$\Delta u(\rho, \varphi) = 0, \quad a < \rho < b, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi,$$

$$\left. \frac{\partial u(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = \cos(3\phi), \quad \left. \frac{\partial u(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right|_{\rho=b} = \sin(3\phi), \quad 0 < \varphi \leq 2\pi$$

Θέμα 2^ο: (Mov. 2).

Να επιλυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 9,$$

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = 0, \quad u(x, 9) = \sin 8\pi x.$$

Θέμα 3^ο:

(α) (Mov. 1). Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < 3, \quad y'(0) = y'(3) = 0.$$

(β) (Mov. 1)

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση

$$\text{θερμότητας: } \begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, & 0 < x < a, \quad t > 0, \quad (a > 0) \\ u_x(0, t) = u_x(a, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = x, & 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

Θέμα 4^ο : (Mov. 2).

Με χρήση ολοκληρωτικού μετασχηματισμού, να βρεθεί η λύση σε ολοκληρωτική μορφή, για το πρόβλημα:

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 < x < \infty, t > 0$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = e^{-t^2}, \quad t \geq 0$$

$$u(x,t) \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow \infty.$$

Θέμα 5^ο : (Mov. 2).

Με χρήση ολοκληρωτικού μετασχηματισμού, να βρεθεί η λύση για το πρόβλημα :

$$\frac{1}{3^2} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad -\infty < x < \infty, 0 < t,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = f(x) = e^{-|x|}/(|x|+1), \quad -\infty < x < \infty$$

$$u \rightarrow 0 \quad \text{as } |x| \rightarrow +\infty$$

(Η λύση να δοθεί υπό ολοκληρωτική μορφή).

Δίνονται οι μετασχηματισμοί:

Fourier

$$F\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx = \hat{f}(s),$$

$$F^{-1}\{\hat{f}(s)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{-isx} ds = f(x),$$

$$F\{f''(x)\} = (-is)^2 \hat{f}(s),$$

Ημιτονικός Fourier

$$\mathcal{F}_s\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(sx) dx = \hat{f}_s(s), \quad s > 0,$$

$$\mathcal{F}_s\{f''(x)\} = -s^2 \hat{f}_s(s) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} s f(0),$$

$$\mathcal{F}_s^{-1}\{\hat{f}_s(s)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_s(s) \sin(sx) ds = f(x).$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ