

Ανάλυση II
Σεπτέμβριος 2007

Θέμα 1. (α) Δείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ υπάρχει.

(β) Υπολογίστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx,$$

για κάθε $p \geq 1$.

(γ) Διατυπώστε το M -χριτήριο Weirstrass για ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων. Χρησιμοποιώντας το χριτήριο αυτό, εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση την σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin^2 x}{n^3}$$

(δ) Δώστε το ανάπτυγμα της συνάρτησης $f(x) = \arctan x$, $|x| < 1$ σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0.

(Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα το ανάπτυγμα της $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $|x| < 1$)

Θέμα 2. (α) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Δείξτε ότι $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο \mathbf{a} δείξτε ότι η παράγωγος της f κατά κατεύθυνση \mathbf{u} στο \mathbf{a} υπάρχει και ισχύει ότι

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \mathbf{u}} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u}$$

(γ) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, y, z) &= 2xy\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k} \\ &= (2xy, x^2 + z^2, 2yz) \end{aligned}$$

Υπολογίστε το $\operatorname{curl} \mathbf{F}$.

Θέμα 3. (α) Εξετάστε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια :

$$(i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y} \quad (ii) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$$

(β) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor τάξης 2 για την συνάρτηση $f(x, y) = \sin(x + y)$ στην περιοχή του σημείου $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

(γ) Βρείτε και ταξινομήστε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης

$$f(x, y) = -x^2 - 2y^2 + 2xy + 4x - 2y - 10$$