

# A

ΣΕΜΦΕ 2ο Εξάμηνο κανονική εξέταση - Ιούλιος 2011 (18-7-11)  
Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές

Ονοματεπώνυμο .....

## Θ E M A T A

Θ1. α) Έστω  $\lambda_1, \lambda_2$  διακεχριμένες ιδιωτιμές ενός ενδομορφισμού  $f : V \rightarrow V$  και έστω  $x_1, x_2$  αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Δείξτε ότι τα  $x_1, x_2$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

β) Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

- i) Δείξτε ότι το χαρακτηριστικό πολυωνύμο του  $A$  είναι  $(x-4)(x+2)^2$ .
- ii) Βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα  $P$  τέτοιο ώστε  $P^{-1}AP = D$ , όπου  $D$  διαγώνιος.
- iii) Βρείτε μια διαγωνοποίηση του πίνακα  $A^{100}$ .

Θ2. α) Έστω πολυωνύμο  $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_k\lambda^k$  που μηδενίζεται από έναν  $n \times n$  πίνακα  $A$ . Δείξτε ότι στον ο πίνακας  $B$  είναι άμοιος με τον  $A$  τότε είναι  $f(B) = 0$ .

β) Διατυπώσατε το Θεώρημα Caley-Hamilton.

γ) Δείξτε ότι άμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυωνύμο.

δ) Δείξτε ότι κάθε γραμμικός παράγοντας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $\chi_A(\lambda)$  ενός  $n \times n$  πίνακα  $A$  είναι και παράγοντας του ελαχιστού πολυωνύμου  $m_A(\lambda)$ .

ε) Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

- i) Βρείτε το ελαχιστό πολυωνύμο του  $A$ .
- ii) Βρείτε τον πίνακα  $A^{-1}$  και δώστε τις ιδιωτιμές του.
- iii) Βρείτε τον πίνακα  $A^{100}$ .

Θ 3. Α Έστω  $V$  ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο  $\langle , \rangle$  και  $T : V \rightarrow V$  ένας γραμμικός μετασχηματισμός.

α) Να ορίσετε τις παρακάτω έννοιες

i) συζυγής γραμμικός μετασχηματισμός του  $T$ , ii)  $T$  αυτοσυζυγής, iii)  $T$  ισομετρικός.

β) Να δείξετε ότι ο  $T$  είναι ισομετρικός αν και μόνο αν απεικονίζει μια ορθοκανονική βάση του  $V$  σε μια ορθοκανονική βάση του  $V$ .

Β) Δίνεται ο γραμμικός μαετασχηματισμός  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  και η βάση  $(\varepsilon) = \{\varepsilon_1 = (1, 1, 1), \varepsilon_2 = (0, 1, 1), \varepsilon_3 = (0, 0, 1)\}$  του  $\mathbb{R}^3$ . Αν  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$  είναι ο πίνακας του  $T$  ως προς τη βάση  $(\varepsilon)$ , να βρεθεί ο  $T^*$  και να δειχθεί ότι ισχύει  $T = T^*$ .

Θ 4. Α Έστω  $M$  ο υπόγωρος του  $\mathbb{R}^4$  που παράγεται από τα διανύσματα  $v_1 = (3, 0, 6, 0), v_2 = (0, -1, 2, 1)$ . Δίνεται επίσης το διάνυσμα  $v_0 = (5, 2, 1, 0)$ . Να βρεθούν:

i) μια ορθοκανονική βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος  $M^\perp$  του  $M$ .

ii) Οι ορθές προβολές του διανύσματος  $v_0$  στους υπογώρους  $M, M^\perp$ .

Β) Δίνεται η εξίσωση  $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz - 4 = 0$ . Να προσδιοριστεί ένα νέο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων ως προς το οποίο η εξίσωση να έχει την κανονική της μορφή και να ανγνωριστεί το είδος της επιφάνειας που παριστάνει.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

# B

ΣΕΜΦΕ 2ο Εξάμηνο κανονική εξέταση - Ιούλιος 2011 (18-7-11)  
Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές

Ονοματεπώνυμο .....

## Θ E M A T A

**Θ1.** α) Εστω  $\lambda_1, \lambda_2$  διακεκριμένες ιδιοτιμές ενός ενδομορφισμού  $f : V \rightarrow V$  και έστω  $x_1, x_2$  αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Δείξτε ότι τα  $x_1, x_2$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

β) Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 12 & -8 & 6 \\ 12 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

i) Δείξτε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$  είναι  $(x-4)(x+2)^2$ .

ii) Βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα  $P$  τέτοιο ώστε  $P^{-1}AP = D$ , όπου  $D$  διαγώνιος.

iii) Βρείτε μια διαγωνοποίηση του πίνακα  $A^{100}$ .

**Θ2.** α) Διατυπώσατε το Θεώρημα Caley-Hamilton.

β) Δείξτε ότι όμως πίνακες έχουν τα ίδια χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

γ) Έστω πολυώνυμο  $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_k\lambda^k$  που μηδενίζεται από έναν  $n \times n$  πίνακα  $A$ . Δείξτε ότι αν ο πίνακας  $B$  είναι όμοις με τον  $A$  τότε είναι  $f(B) = 0$ .

δ) Δείξτε ότι κάθε γραμμικός παράγοντας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $\chi_A(\lambda)$  ενός  $n \times n$  πίνακα  $A$  είναι και παράγοντας του ελάχιστου πολυωνύμου  $m_A(\lambda)$ .

ε) Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

i) Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του  $A$ .

ii) Βρείτε τον πίνακα  $A^{-1}$  και δώστε τις ιδιοτιμές του.

iii) Βρείτε τον πίνακα  $A^{100}$ .

**Θ 3.** Α Έστω  $V$  ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο  $\langle , \rangle$  και  $T : V \rightarrow V$  ένας γραμμικός μετασχηματισμός.

α) Να ορίσετε τις παρακάτω έννοιες

i) συζυγής γραμμικός μετασχηματισμός του  $T$ , ii)  $T$  αυτοσυγγής, iii)  $T$  ισομετρικός.

β) Να δείξετε ότι ο  $T$  είναι ερμιτιανός αν και μόνο αν ο πίνακας, που αντιστοιχεί στον  $T$  ως προς μια ορθοκανονική βάση, του  $V$ , είναι ερμιτιανός.

Β) Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  και η βάση  $(\varepsilon) = \{\varepsilon_1 = (1, 1, 1), \varepsilon_2 = (0, 1, 1), \varepsilon_3 =$

$(0, 0, 1)\}$  του  $\mathbb{R}^3$ . Αν  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -2 \end{bmatrix}$  είναι ο πίνακας του  $T$  ως προς τη βάση  $(\varepsilon)$ , να βρεθεί ο  $T^*$  και να δειχθεί ότι ισχύει  $T = T^*$ .

**Θ 4.** Α Έστω  $M$  ο υπόγωρος του  $\mathbb{R}^4$  που παράγεται από τα διανύσματα  $v_1 = (0, 1, 0, 1)$ ,  $v_2 = (-2, 2, 1, 0)$ . Δίνεται επίσης το διάνυσμα  $v_0 = (5, 2, 1, 0)$ . Να βρεθούν:

i) μια ορθοκανονική βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος  $M^\perp$  του  $M$ .

ii) Οι ορθές πραβολές του διανύσματος  $v_0$  στους υπογώρους  $M$ ,  $M^\perp$ .

Β) Δίνεται η εξίσωση  $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz - 6 = 0$ . Να προσδιοριστεί ένα νέο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων ως προς το οποίο η εξίσωση, να έχει την κανονική της μορφή και να ανγγινωριστεί το είδος της επιφάνειας που παριστάνεται.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ