

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ 30/9/2005**

**Θέμα 1.**

(α). Δώστε τον ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας για πεπερασμένα και άπειρα σύνολα διανυσμάτων.

(β). Έστω  $X$  διανυσματικός χώρος,  $A$  γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του  $X$  και  $B_1, B_2$  ξένα μη κενά υποσύνολα του  $A$ . Δείξτε ότι  $Y \cap Z = \{0\}$ , όπου  $Y = \langle B_1 \rangle$  και  $Z = \langle B_2 \rangle$ .

(γ). Έστω  $\{x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}\}$  βάση ενός διανυσματικού χώρου  $X$ . Ορίζουμε  $P: X \rightarrow X$  με

$$P(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{2n} x_{2n}) = \sum_{k=1}^n \lambda_{2k} x_{2k}.$$

Δείξτε ότι η  $P$  είναι γραμμική και βρείτε τα  $\text{Im}P$  και  $\text{Ker}P$ .

**Θέμα 2.**

(α). Δείξτε ότι ο διανυσματικός χώρος  $(c_{00}(\mathbb{N}), |\cdot| \cdot \|_1)$  είναι πυκνός υπόχωρος του  $\ell_1(\mathbb{N})$ .

(β). Δουθέντος ότι κάθε χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης είναι πλήρης, δείξτε ότι κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach έχει υπεραριθμήσιμη Hamel βάση.

(γ). Δείξτε ότι ο χώρος

$$P = \{a_n x^n + \dots - a_1 x + a_0 : n \in \mathbb{N} \text{ και } a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

των πολυωνύμων, δεν δέχεται νόρμα ως προς την οποία να είναι πλήρης.

**Θέμα 3.**

(α). Έστω

$$I_1: (c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2) \rightarrow (c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1) \quad \text{και} \quad I_2: (c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1) \rightarrow (c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$$

όπου  $I_1$  και  $I_2$  οι ταυτοτικά τελεστές.

Δείξτε ότι οι  $I_1$  και  $I_2$  είναι γραμμικοί και εξετάστε αν είναι συνεχείς. Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

(β). Έστω  $(X, \|\cdot\|_X)$  και  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  χώροι με νόρμα και  $T: X \rightarrow Y$  γραμμικός.  $I-1$  και επί.

(1) Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α') Οι  $T$  και  $T^{-1}$  είναι συνεχείς (δηλαδή ο  $T$  είναι ισομορφισμός).

(β') Υπάρχουν σταθερές  $c_1, c_2 > 0$  τέτοιες ώστε  $c_1 \|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq c_2 \|x\|_X$  για κάθε  $x \in X$ .

(2) Αν ο  $(X, \|\cdot\|_X)$  είναι χώρος Banach και  $T: X \rightarrow Y$  ισομορφισμός, δείξτε ότι και ο  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  είναι χώρος Banach.

**Θέμα 4.**

(α). Έστω  $x_1^*, \dots, x_n^*$  συνεχή γραμμικά συναρτησοειδή και ορίζουμε

$$T : X \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$$

με  $T(x) = (x_1^*(x), \dots, x_n^*(x))$ . Δείξτε ότι ο  $T$  είναι γραμμικός και συνεχής. Υπολογίστε τη νόρμα του  $T$  και βρείτε το  $\text{Ker}T$ .

(β). Έστω  $(X, \|\cdot\|_X)$  χώρος με νόρμα,  $\{x_1, \dots, x_n\}$  γραμμικά ανεξάρτητα και  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι υπάρχει  $x^* : X \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχές γραμμικό, τέτοιο ώστε  $x^*(x_i) = \lambda_i$ , για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Θέμα 5.**

(α). Δώστε τον ορισμό του θετικού υπογραμμικού συναρτησιακού  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  και τον ορισμό του συναρτησιακού Minkowski  $p_K$  όπου  $K$  κυρτό με  $0 \in K^\circ$ .

(β). Δείξτε ότι αν  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  θετικό υπογραμμικό συναρτησοειδές, τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (1)  $p$  συνεχές.
  - (2) Υπάρχει  $V$  ανοιχτή περιοχή του 0 με  $p(V)$  φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ .
- (γ). Έστω  $K$  κυρτό συμπαγές και  $L \subset K$ , με την ιδιότητα για κάθε  $x^* \in X^*$ ,

$$\sup\{x^*(x) : x \in K\} = \sup\{x^*(x) : x \in L\}.$$

Δείξτε ότι  $\overline{\text{conv}L} = K$ .

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**