

Χαριστική Εξέταση Πραγματικής Ανάλυσης, 14/12/2007

Θέμα 1 Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος.

- (i) Άν $(x_n)_n, x_0$ ανήκουν στον X τότε τα εξής είναι ισοδύναμα
 - (α) $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$
 - (β) $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0$
- (ii) Άν $(x_n)_n$ και $(y_n)_n$ είναι ακολουθίες στον X και $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$ δείξτε ότι $\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x_0, y_0)$
- (iii) Άν F, G είναι ξένα μη κενά συμπαγή υποσύνολα του X τότε υπάρχουν $x_0 \in F$ και $y_0 \in G$ ώστε $\rho(x_0, y_0) = \rho(F, G) = \inf\{\rho(x, y) : x \in F, y \in G\}$

Θέμα 2 (α) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subset X$.

- (i) Δώστε τον ορισμό του \bar{A} .
- (ii) Δείξτε ότι το $X \setminus \bar{A}$ είναι ανοικτό.
- (iii) Άν $x \in \bar{A} \setminus A$ δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ το $S(x, \varepsilon) \cap A$ είναι απειροσύνολο.
(β) Έστω X σύνολο ώστε ο (X, ρ_d) να είναι συμπαγής. Τι συμπεραίνετε για το X ; (ρ_d είναι η διακριτή μετρική.)

Θέμα 3 (α) Έστω $(X, \rho), (Y, d)$ μετρικοί χώροι και $f : X \rightarrow Y$ συνάρτηση. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (i) Η f είναι συνεχής ($\varepsilon - \delta$ ορισμός)
- (ii) Άν $U \subset Y$ ανοικτό τότε το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X .
(β) Άν (X, ρ) είναι μετρικός χώρος και $K \subset X$ συμπαγές, δείξτε ότι το K είναι κλειστό.

Θέμα 4 Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ συστολή (υπάρχει $0 < C < 1$ ώστε $\rho(f(x), f(y)) \leq C\rho(x, y)$).

- (α) Άν x_0 σταθερό σημείο της f δείξτε ότι είναι μοναδικό.
- (β) Δείξτε ότι για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(f^{(n)}(x))_n$ είναι βασική.
- (γ) Δείξτε ότι $f^{(n)}(x) \rightarrow x_0$ ώστε $f(x_0) = x_0$.