

Εξετάσεις Πραγματικής Ανάλυσης, 29/10/2007

Θέμα 1(a) Δίνονται τα παρακάτω υποσύνολα του (\mathbb{R}^2, ρ_2) .

$$A_1 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < \frac{1}{2}\}, A_2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{Q}^+\}$$

$$A_3 = \{(x, \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R}^+\}, A_4 = \{(n, \frac{1}{n^2}) : n \in \mathbb{N}\} A_5 = \{(x_1, x_2) : |x_1| + |x_2| \leq 1\}$$

Να βρείτε ποια από τα παραπάνω είναι:

(i.) Ανοικτά, (ii.) Κλειστά, (iii.) Συμπαγή (iv.) Βρείτε τις κλειστότητες των παραπάνω συνόλων.

(Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας)

(β) (i.) Δώστε τον ορισμό της ισοσυνέχειας μιας οικογένειας συναρτήσεων $\{f_i : i \in I\} \subset (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$

(ii.) Εξετάστε αν $\{f_n(x) = x^n : n \in \mathbb{N}\}, x \in [0, 1]$ είναι ισοσυνεχής, (iii.) Είναι το σύνολο $\{f \in C[0, 1] : \|f\|_\infty \leq 1\}$ συμπαγές; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Θέμα 2 Έστω X σύνολο και $(f_i)_{i=1}^n$ πεπερασμένη οικογένεια συναρτήσεων ώστε για κάθε $x, y \in X, x \neq y$ υπάρχει $i \in \{1, \dots, n\}$ με $f_i(x) \neq f_i(y)$.

Θέτουμε $\rho(x, y) = \max\{|f_i(x) - f_i(y)| : i = 1, \dots, n\}$.

(α) Δείξτε ότι ο (X, ρ) είναι μετρικός χώρος

(β) Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i.) Η ακολουθία $(x_k)_k$ συγκλίνει στο x ως προς τη ρ .

(ii). Για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ ισχύει $f_i(x_k) \rightarrow f_i(x)$.

(γ) Αν κάθε f_i είναι φραγμένη να δείξετε ότι κάθε $(x_k)_k$ ακολουθία στον X έχει βασική υπακολουθία.

(δ) Έστω $g : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ με (Y, d) μετρικό χώρο. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i.) Η g είναι συνεχής

(ii.) $f_i \circ g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$.

Θέμα 3(a) (i.) Δώστε τον ορισμό του συμπαγούς μετρικού χώρου και της ιδιότητας της πεπερασμένης τομής.

(ii.) Δείξτε την ισοδυναμία: Ο μετρικός χώρος (X, ρ) είναι συμπαγής αν και μόνο αν έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.

(iii.) Δείξτε ότι σ' ένα συμπαγή μετρικό κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει.

(β) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και F, G ξένα και κλειστά υποσύνολά του.

(i.) Δείξτε ότι $d(F, G) = \inf\{\rho(x, y) : x \in F, y \in G\} > 0$.

(ii.) Δείξτε ότι υπάρχουν U, V ανοικτά ξένα ώστε $F \subset U, G \subset V$.

Θέμα 4 Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ συστολή (υπάρχει $0 < C < 1$ ώστε $\rho(f(x), f(y)) \leq C\rho(x, y)$).

(α) Αν x_0 σταθερό σημείο της f δείξτε ότι είναι μοναδικό.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(f^{(n)}(x))_n$ είναι βασική.

(γ) Δείξτε ότι $f^{(n)}(x) \rightarrow x_0$ ώστε $f(x_0) = x_0$.