

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ - II

1. Δίνεται η μέθοδος:

$$y_{n+2} + (b-1)y_{n+1} - b y_n = h/4 \{ (b+3)f_{n+2} + (3b+1)f_n \}$$

Να εξεταστεί αν για  $b=-1$  η μέθοδος (3) είναι *μηδενικά ευσταθής*.

2. Το σφάλμα αποκοπής της γραμμικής μεθόδου  $k$ -βημάτων μπορεί να γραφεί:

$$T_n = \frac{1}{h\sigma(1)} \{ C_0 y(x_n) + C_1 h y'(x_n) + \dots + C_p h^p y^{(p)}(x_n) + \dots \}$$

όπου,

$$C_0 = \sum_{j=0}^k a_j, \quad C_1 = \sum_{j=1}^k j a_j - \sum_{j=0}^k \beta_j, \quad \dots, \quad C_p = \sum_{j=1}^k \frac{j^p}{p!} a_j - \sum_{j=1}^k \frac{j^{p-1}}{(p-1)!} \beta_j.$$

Να διατυπωθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η μέθοδος να είναι τάξης  $p$ , και ναδειχθεί ότι η μέθοδος της άσκησης (1) είναι *τάξης 2* αν  $b \neq -1$ .

3. Ναδειχθεί ότι η πολυβηματική μέθοδος 3ης τάξης της μορφής:

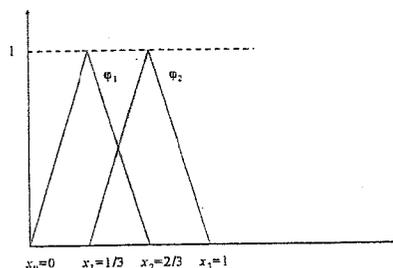
$$y_{n+3} = -4(3a+1)y_{n+2} + (12a+5)y_{n+1} + h[(7a+4)f_{n+2} + (4a+2)f_{n+1} + a f_n],$$

είναι *μηδενικά ευσταθής* όταν  $-\frac{1}{2} < a \leq -\frac{1}{3}$

4. Δίνεται το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών της μορφής:

$$-u'' + 3u = 2x, \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

- Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις *στεγές* (τμηματικά πολυώνυμα 1<sup>ου</sup> βαθμού)  $\varphi_1(x)$  και  $\varphi_2(x)$ , σύμφωνα με το σχήμα.



- Να υπολογιστούν τα στοιχεία του πίνακα  $A$ , και του διανύσματος  $b$ , του γραμμικού συστήματος  $A c = b$  που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου *Galerkin* με συναρτήσεις βάσης τις  $\varphi_1(x)$  και  $\varphi_2(x)$  για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος όπου  $h=1/3$ .
- Επίλυστε το γραμμικό σύστημα που προκύπτει με όποιο τρόπο θέλετε για να υπολογίσετε την έκφραση της λύσης του προβλήματος.
5. Δίνεται το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών της μορφής:

$$u'' - 2u' = x, \quad x \in (0, 1), \quad h = 0.25$$

$$u_0 = u(0) = 1, \quad u_4 = u(1) = -1$$

- Να υπολογιστεί το γραμμικό σύστημα για την προσέγγιση της λύσης στα σημεία που ορίζονται από την διαμέριση  $x_i = ih$ , αν εφαρμόσουμε την μέθοδο των **πεπερασμένων διαφορών**.
- Επιλύστε το γραμμικό σύστημα με όποιο τρόπο θέλετε για να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές της λύσης στα σημεία αυτά.

(Υπόδειξη:  $u''(x_i) \approx (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})/h^2$ ,  $u'(x_i) \approx (u_{i+1} - u_i)/h$ ).

6. Δίνεται η εξίσωση:

$$y' = -y^3/2, \quad y(0) = 1,$$

και ζητάμε στο σημείο,  $x_1 = 0.2$ , την προσέγγιση  $y_1$  εφαρμόζοντας την έμμεση μέθοδο:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\}.$$

Να υπολογιστεί η μη γραμμική αλγεβρική εξίσωση που αντιστοιχεί για την προσέγγιση  $y_1$ , και εν συνεχεία ο επαναληπτικός τύπος της μεθόδου **Newton**, για την επίλυση της αλγεβρικής αυτής εξίσωσης. Υπολογίστε μία αρχική προσέγγιση  $y_1^{(0)}$ , χρησιμοποιώντας ένα βήμα της άμεσης μεθόδου **Euler**, ( $h=0.2$ ) και εν συνεχεία υπολογίστε μία αριθμητική τιμή για την  $y_1$ , εφαρμόζοντας δύο φορές την μέθοδο **Newton**.

7. Δίνεται η μέθοδος **Runge-Kutta (RK)** της μορφής:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + h/2, y_n + hk_1/2)$$

$$k_3 = f(x_n + h/2, y_n + hk_2/2)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

Να υπολογίσετε το **πολώνυμο ευστάθειας** της μεθόδου, εφαρμόζοντας την μέθοδο στην διαφορική εξίσωση μοντέλο,  $y' = \lambda y$ ,  $y(0) = y_0 (\neq 0)$ , όπου  $\lambda$  είναι ένας πραγματικός και αρνητικός αριθμός. Ποια συνθήκη πρέπει να ισχύει ώστε η μέθοδος να είναι **απόλυτα ευσταθής**.

8. Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών για διαφορική εξίσωση 2ης τάξης της μορφής:

$$y'' - 10y' - 11y = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = -1$$

Να μετασηματισθεί σε ισοδύναμο πρόβλημα αρχικών τιμών 1ης τάξης. Εν συνεχεία, το σύστημα που θα προκύψει, να μελετηθεί ως προς την **ευστάθεια**.

9. Δίνεται η διαφορική εξίσωση 3ης τάξης της μορφής:

$$y''' = -y'' + 2y.$$

Να μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο σύστημα διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης. Εν συνεχεία το σύστημα που θα προκύψει, να μελετηθεί ως προς την ευστάθεια.

10. Δίνεται η διαφορική εξίσωση 3ης τάξης της μορφής:

$$y''' = -2y'' - y' - 2y.$$

Να μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο πρόβλημα αρχικών τιμών 1ης τάξης. Εν συνεχεία, το σύστημα που θα προκύψει, να μελετηθεί ως προς την ευστάθεια.

11. Δίνεται μέθοδος:

$$y_{n+2} - (1-a)y_{n+1} + ay_n = \frac{h}{2}[f_{n+2} + (1-a)f_{n+1} - af_n].$$

Να υπολογιστεί η παράμετρος  $a$  ώστε η μέθοδος να είναι *συγκλίνουσα*.

12. Δίνεται το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών :

$$\begin{aligned} -u'' + (1+x^2)u &= x^3, \\ x \in (0,1), u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Θεωρούμε ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε την λύση του προβλήματος εφαρμόζοντας την μέθοδο *Galerkin*. Να υπολογιστεί η ασθενής μορφή του προβλήματος εφαρμόζοντας την μέθοδο, και το αντίστοιχο προσεγγιστικό πρόβλημα συμβολικά, χρησιμοποιώντας δύο προσεγγιστικές συναρτήσεις βάσης  $\varphi_1(x)$  και  $\varphi_2(x)$ .

13. Δίνεται το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών της μορφής:

$$\begin{aligned} u'' - 3u' &= 2x, \quad x \in (0,1), \quad h=0.2, \\ u_0 = u(0) &= 1, \quad u_4 = u(1) = -1 \end{aligned}$$

Να υπολογιστεί (χωρίς να λυθεί) το γραμμικό σύστημα για την προσέγγιση της λύσης στα σημεία που ορίζονται από την διαμέριση  $x_i = ih$ , αν εφαρμόσουμε την μέθοδο των *πεπερασμένων διαφορών*.

14. Δίνεται το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών της μορφής:

$$\begin{aligned} -u'' + \lambda u &= f, \quad x \in (0,1), \\ u'(0) &= u'_0, \quad u'(1) = u'_1 \end{aligned}$$

Να δειχθεί ότι η ασθενής μορφή του προβλήματος, για την εφαρμογή της μεθόδου *Galerkin*, δίνεται από την σχέση:

$$\int_0^1 (u' \varphi' + \lambda u \varphi) dx = \int_0^1 f \varphi dx + u'_1 \varphi(1) - u'_0 \varphi(0), \quad \forall \varphi \in C^1[0,1].$$

15. Δίνεται το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών της μορφής:

$$u'' - (1 - x/5)u = x, \quad x \in [1, 3], \quad h = 0.5$$

$$u_0 = u(1) = 2, \quad u_4 = u(3) = -1$$

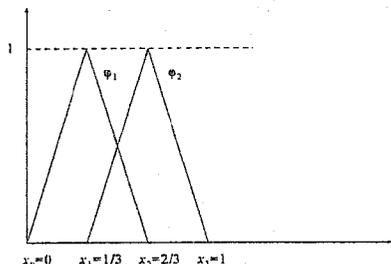
- Να υπολογιστεί το γραμμικό σύστημα για την προσέγγιση της λύσης στα εσωτερικά σημεία που ορίζονται από την διαμέριση  $x_i = x_0 + ih$ , αν εφαρμόσουμε την μέθοδο των *πεπερασμένων διαφορών*.
- Επιλύστε το γραμμικό σύστημα με όποιο τρόπο θέλετε για να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές της λύσης στα σημεία αυτά. (Πράξεις με 3 δεκαδικά).

16. Δίνεται το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών της μορφής:

$$-u'' + 2u = 3x^2, \quad x \in (0, 1),$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

- Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις *στέγες* (τμηματικά πολώνυμα 1<sup>ου</sup> βαθμού)  $\varphi_1(x)$  και  $\varphi_2(x)$ , σύμφωνα με το σχήμα.



- Να υπολογιστούν τα στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{A}$ , και του διανύσματος  $\mathbf{b}$ , του γραμμικού συστήματος  $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}$  που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου *Galerkin* με συναρτήσεις βάσης τις  $\varphi_1(x)$  και  $\varphi_2(x)$  για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος όπου  $h = 1/3$ .

17. Δίνεται το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών της μορφής:

$$u'' - 5x^2 u' = 4x, \quad x \in (0, 5), \quad h = 1,$$

$$u_0 = u(0) = 1, \quad u_5 = u(5) = 0$$

Να υπολογιστεί το γραμμικό σύστημα για την προσέγγιση της λύσης στα σημεία που ορίζονται από την διαμέριση  $x_i = ih$ , αν εφαρμοστεί η μέθοδος των *πεπερασμένων διαφορών*. Αναφέρατε μερικές από τις μεθόδους επίλυσης του γραμμικού συστήματος.

18. Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής:  $y' = -4/3 y^2$ ,  $y(0) = 1$ , και ζητάμε την προσέγγιση  $y_1$  στο σημείο  $x_1 = 0.2$ , εφαρμόζοντας την *έμμεση* μέθοδο *τραπεζίου*. Να υπολογίσετε την μη γραμμική αλγεβρική εξίσωση για την προσέγγιση της  $y_1$ , και εν συνεχεία τον επαναληπτικό τύπο της μεθόδου *Newton*, για την επίλυση αυτής. Υπολογίστε μία αρχική προσέγγιση  $y_1^{(0)}$ , εφαρμόζοντας ένα βήμα την άμεση μέθοδο *Euler*, και εν συνεχεία υπολογίστε μία αριθμητική τιμή για την  $y_1$ , εφαρμόζοντας δύο φορές την μέθοδο *Newton*.

19. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής:

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = y_0 \quad (1)$$

και η μέθοδος  $k$ -βημάτων της μορφής:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j} \quad (2)$$

- Να ορίσετε το 1<sup>ο</sup> και 2<sup>ο</sup> χαρακτηριστικό πολυώνυμο που αντιστοιχεί στην (2).
- Αναφέρατε τα κριτήρια που πρέπει να ισχύουν ώστε η (2) να είναι μηδενικά ευσταθής και συνεπής αντίστοιχα.

Δίνεται η μέθοδος:

$$y_{n+3} - \frac{11}{6} y_{n+2} + y_{n+1} - \frac{1}{6} y_n = \frac{h}{3} f_{n+3},$$

όπου  $h$  είναι το βήμα της διαμέρισης, και  $y_n = y(x_n)$ , ο οποίος προτείνεται για την επίλυση του (1). Να εξετάσετε αν η μέθοδος είναι μηδενικά ευσταθής και συνεπής.

20. Να εφαρμοστεί η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών για την προσέγγιση της λύσης του προβλήματος δύο συνοριακών τιμών:

$$y'' + 4y' - 4y = 0$$

$$0 \leq x \leq 5$$

$$y(0) = 1, \quad y(5) = 0,$$

στο διάστημα  $[0, 5]$  με βήμα  $h=1$ .

21. Θεωρούμε την έμμεση μέθοδο *Euler*:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}), \quad y(a) = y_0.$$

Να υπολογιστεί το διάστημα και το χωρίο ευστάθειας της μεθόδου, εφαρμόζοντας το πρόβλημα  $y' = \lambda y$ ,  $y(0) = y_0 (\neq 0)$ ,  $\lambda < 0$ . Πως ονομάζονται οι μέθοδοι με τα χαρακτηριστικά ευστάθειας της παραπάνω μεθόδου.

22. Δίνεται η εξίσωση:

$$y' = -\frac{3}{2} y^2, \quad y(0) = 1,$$

και ζητάμε, την προσέγγιση  $y_1$  στο σημείο,  $x_1 = 0.2$  εφαρμόζοντας την έμμεση μέθοδο:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Να υπολογιστεί η μη γραμμική αλγεβρική εξίσωση που αντιστοιχεί για την προσέγγιση  $y_1$ , και εν συνεχεία ο επαναληπτικός τύπος της μεθόδου *Newton*, για την επίλυση της αλγεβρικής αυτής εξίσωσης. Υπολογίστε μία αρχική προσέγγιση  $y_1^{(0)}$ , χρησιμοποιώντας δύο βήματα της άμεσης μεθόδου *Euler*, ( $h=0.1$ ) και εν συνεχεία υπολογίστε μία αριθμητική τιμή για την  $y_1$ , εφαρμόζοντας δύο φορές την μέθοδο *Newton*.

23. Δίνεται η διαφορική εξίσωση τρίτης τάξης:

$$y''' - 2xy'' + 4xyy' - x^2y = 1,$$

με αρχικές τιμές:  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ ,  $y''(0) = 3$ .

Να υπολογίσετε με κατάλληλο μετασχηματισμό το ισοδύναμο σύστημα 1<sup>ης</sup> τάξης με αρχικές τιμές.

24. Δίνεται το πρόβλημα 2<sup>ης</sup> τάξης:

$$-2u'' + u = \exp(-2.0x), \quad x \in [0, 10]$$

με συνοριακές συνθήκες,  $u'(1) = u(1)$  και  $u'(10) = 0$ . Υποθέτουμε ότι το βήμα της διαμέρισης είναι  $h = 1$ , και ζητάμε να υπολογιστούν οι εξισώσεις διαφορών οι οποίες προκύπτουν αν εφαρμόσουμε την μέθοδο των *πεπερασμένων διαφορών* για την προσέγγιση της λύσης του προβλήματος.

25. Δίνεται το πρόβλημα 2<sup>ης</sup> τάξης:

$$u'' = 2u' - u + x^2 - 1, \quad x \in [0, 1]$$

με συνοριακές συνθήκες,  $u(0) = 5$  και  $u(1) = 10$ . Αν το βήμα της διαμέρισης είναι  $h = 0.25$ , να υπολογίσετε μία προσέγγιση της λύσης στα εσωτερικά σημεία εφαρμόζοντας την μέθοδο των *πεπερασμένων διαφορών*. Να συγκρίνετε αυτές τις προσεγγίσεις με τις αντίστοιχες θεωρητικές τιμές, οι οποίες υπολογίζονται την λύση  $u(x) = x^2 + 4x + 5$ .

26. Θεωρούμε το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών της μορφής:

$$\begin{aligned} u'' &= u' + 2x, & 0 < x < 2 \\ u(0) &= 0, & u(2) = 2 \end{aligned}$$

και τα σημεία της διαμέρισης  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0.5$ ,  $x_3 = 1.2$ ,  $x_4 = 1.6$ ,  $x_5 = 2$ . Να εφαρμόσετε την μέθοδο της *ταξινόμησης* για την προσέγγιση της λύσης χρησιμοποιώντας σαν συναρτήσεις βάσης τα μονώνυμα  $1, x, x^2, x^3, x^4$ .

27. Θεωρούμε το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών της μορφής:

$$\begin{aligned} u'' &= u' + u, & 0 < x < 1 \\ u(0) &= 0, & u(1) = 1 \end{aligned}$$

και τα σημεία της διαμέρισης  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0.4$ ,  $x_3 = 0.8$ ,  $x_4 = 1$ . Να εφαρμόσετε την μέθοδο της *ταξινόμησης* για την προσέγγιση της λύσης χρησιμοποιώντας σαν συναρτήσεις βάσης τα μονώνυμα  $1, x, x^2, x^3$ .

28. Θεωρούμε το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών της μορφής:

$$\begin{aligned} u'' &= u + x, & 0 < x < 1 \\ u(0) &= 0, & u(1) = 2 \end{aligned}$$

και τα σημεία της διαμέρισης  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0.6$ ,  $x_3 = 1$ . Να εφαρμόσετε την μέθοδο της *ταξινόμησης* για την προσέγγιση της λύσης χρησιμοποιώντας σαν συναρτήσεις βάσης τις συναρτήσεις  $\varphi_1(x) = 1 + x$ ,  $\varphi_2(x) = x^2$ ,  $\varphi_3(x) = 1 - x$ .