

Εξετάσεις Κυρτής Ανάλυσης
16/2/2006

Θέμα 1 (α)(i) Έστω K, L κυρτά υποσύνολα του \mathbb{R}^n . Δείξτε ότι το $K + L$ είναι κυρτό.

(ii) Έστω K κυρτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Δείξτε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε ακολουθία $(\lambda_i)_{i=1}^k$ θετικών πραγματικών αριθμών ισχύει ότι $\sum_{i=1}^k (\lambda_i K) = (\sum_{i=1}^k \lambda_i)K$.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. (i) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό. Υπότομες $K^* = \{x \in \mathbb{R}^n : x + A \subseteq K\}$. Δείξτε ότι το K^* είναι κυρτό.

(ii) Διατυπώστε το θεώρημα του Helly.

(iii) Έστω \mathcal{F} πεπερασμένη οικογένεια από τουλάχιστον $n+1$ κυρτά. Υποθέτουμε ότι για κάθε υποοικογένεια \mathcal{G} της \mathcal{F} με $n+1$ μέλη, υπάρχει μεταφορά του A που να περιέχεται σε όλα τα μέλη της \mathcal{G} . Δείξτε ότι υπάρχει μεταφορά του A που να περιέχεται σε όλα τα μέλη της \mathcal{F} .

Θέμα 2 (α) Έστω K κλειστό κυρτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει ένα μοναδικό σημείο y του K ώστε $d(x, y) = d(x, K)$. Διατυπώστε τις ιδιότητες της μετρικής προβολής $p_K : \mathbb{R}^n \rightarrow K$.

(β) Δώστε τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και δείξτε ότι κάθε τοπικό ελάχιστο της f είναι και ολικό ελάχιστο.

Θέμα 3(α) Δώστε τον ορισμό του ακραίου υποσυνόλου ενός κυρτού συνόλου και βρείτε όλα τα ακραία υποσύνολα της κλειστής μοναδιαίας σφαίρας $\overline{B}(0, 1)$ του \mathbb{R}^n .

(β) Έστω $A \subseteq B \subseteq C \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτά. Υποθέτουμε ότι το A είναι ακραίο υποσύνολο του B και το B είναι ακραίο υποσύνολο του C . Δείξτε ότι το A είναι ακραίο υποσύνολο του C .

(γ) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ώστε $0 \in \text{Int}K$. Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $x \in \overline{K}$ αν και μόνο αν $\inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\} \leq 1$.

Θέμα 4 (α) Αν $X \subseteq \mathbb{R}^n$, θέτουμε $\text{diam } X = \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}$. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο και έστω $\text{diam } A = \delta$.

(i) Δείξτε ότι $\text{conv}(A) \subseteq \overline{B}(z, \delta)$ για όλα τα $z \in A$.

(ii) Δείξτε ότι $\text{conv}(A) \subseteq \overline{B}(x, \delta)$ για όλα τα $x \in \text{conv}(A)$.

(iii) Δείξτε ότι $\text{diam } A = \text{diam conv}(A)$.

(β) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό και F ακραίο γνήσιο υποσύνολο του K .

(i) Δείξτε ότι το $K \setminus F$ είναι κυρτό.

(ii) Εάν $\varepsilon > 0$. Υπότομες $F_\varepsilon = \cup_{z \in F} B(z, \varepsilon)$ και $L = K \setminus F_\varepsilon$. Δείξτε ότι $\text{conv}(L) \cap F = \emptyset$.

(iii) Δείξτε ότι υπάρχει υπερεπίπεδο H του \mathbb{R}^n ώστε $F \subseteq H^+$ και $\text{diam}(H^+ \cap K) \leq \text{diam } F + 2\varepsilon$.